

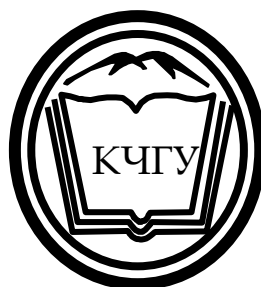
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**Карачаево-Черкесский государственный университет
имени У.Д. Алиева**

Кафедра математического анализа

**ЭКОНОМЕТРИКА: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ И ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ**

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ



Карачаевск – 2015

УДК - 330.43
ББК - 65в6я73

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Карачаево-Черкесского государственного университета

Эконометрика: методы решения задач и типовых расчетов. Методическое пособие. Карачаевск: изд-во КЧГУ, 2015. - 40с.

Предлагаемое методическое пособие по дисциплине «Эконометрика» предназначено для студентов II-III курса направлений подготовки бакалавров дневного и заочного отделений физико-математического факультета и факультета экономики и управления. Практический материал сопровождается примерами и задачами. Приведены варианты заданий для контрольных работ, комплекты расчетно-графических заданий и типовых расчетов.

Составитель:

А.М. Мамчуев, к. ф.-м. наук, доц. (КЧГУ)

Рецензенты:

М.Х. Чанкаев, к. ф.-м. наук, доц. (КЧГУ)

Р.А. Боташев, доц. (КЧГУ)

© Карачаево-Черкесский государственный университет, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 4 |
| I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ..... | 5 |
| 1. Парная регрессия и корреляция..... | 5 |
| 1.1 Варианты индивидуальных заданий..... | 9 |
| 2. Множественная регрессия и корреляция..... | 13 |
| 2.1 Варианты индивидуальных заданий..... | 20 |
| 3. Временные ряды..... | 23 |
| 3.1 Варианты индивидуальных заданий | 27 |
| 4. Системы эконометрических уравнений..... | 28 |
| 4.1 Варианты индивидуальных заданий | 31 |
| II. МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ..... | 34 |
| III. ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ЗАЧЕТА (ЭКЗАМЕНА)..... | 37 |
| ЛИТЕРАТУРА..... | 38 |

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее методическое пособие составлено в соответствии с рабочей учебной программой курса «Эконометрика» для студентов дневного и заочного отделения всех направлений подготовки бакалавров дневного и заочного отделений физико-математического факультета и факультета экономики и управления. В методическом пособии нашли детальное изложение основные эконометрические типовые задачи и расчеты, методы их решения, а также варианты домашних заданий (контрольной работы), как для студентов стационара, так и ОЗО. В целях более глубокого изучения теоретического и практического материала по дисциплине «Эконометрика» можно использовать учебники и учебные пособия (список приведен в конце методического пособия).

Для выполнения контрольной работы, необходимо выбрать последнюю цифру зачетной книжки с совпадающим номером варианта отдельного задания.

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ВАРИАНТА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

1. ПАРНАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Пример. По территориям региона приводятся данные за 2000 г.

Таблица 1

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 78 | 133 |
| 2 | 82 | 148 |
| 3 | 87 | 134 |
| 4 | 79 | 154 |
| 5 | 89 | 162 |
| 6 | 106 | 195 |
| 7 | 67 | 139 |
| 8 | 88 | 158 |
| 9 | 73 | 152 |
| 10 | 87 | 162 |
| 11 | 76 | 159 |
| 12 | 115 | 173 |

Требуется:

1. Построить линейное уравнение парной регрессии y от x .
2. Рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и среднюю ошибку аппроксимации.
3. Оценить статистическую значимость параметров регрессии и корреляции с помощью F -критерия Фишера и t -критерия Стьюдента.
4. Выполнить прогноз заработной платы y при прогнозном значении среднедушевого прожиточного минимума x , составляющем 107% от среднего уровня.
5. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.
6. На одном графике построить исходные данные и теоретическую прямую.

Решение

1. Для расчета параметров уравнения линейной регрессии строим расчетную таблицу 2.

Таблица 2

| | | y | yx | x^2 | y^2 | \hat{y}_x | $y - \hat{y}_x$ | A_i |
|------------------|--------|--------|---------|--------|---------|-------------|-----------------|-------|
| 1 | 78 | 133 | 10374 | 6084 | 17689 | 149 | -16 | 12,0 |
| 2 | 82 | 148 | 12136 | 6724 | 21904 | 152 | -4 | 2,7 |
| 3 | 87 | 134 | 11658 | 7569 | 17956 | 157 | -23 | 17,2 |
| 4 | 79 | 154 | 12166 | 6241 | 23716 | 150 | 4 | 2,6 |
| 5 | 89 | 162 | 14418 | 7921 | 26244 | 159 | 3 | 1,9 |
| 6 | 106 | 195 | 20670 | 11236 | 38025 | 174 | 21 | 10,8 |
| 7 | 67 | 139 | 9313 | 4489 | 19321 | 139 | 0 | 0,0 |
| 8 | 88 | 158 | 13904 | 7744 | 24964 | 158 | 0 | 0,0 |
| 9 | 73 | 152 | 11096 | 5329 | 23104 | 144 | 8 | 5,3 |
| 10 | 87 | 162 | 14094 | 7569 | 26244 | 157 | 5 | 3,1 |
| 11 | 76 | 159 | 12084 | 5776 | 25281 | 147 | 12 | 7,5 |
| 12 | 115 | 173 | 19895 | 13225 | 29929 | 183 | -10 | 5,8 |
| Итого | 1027 | 1869 | 161808 | 89907 | 294377 | 1869 | 0 | 68,9 |
| Среднее значение | 85,6 | 155,8 | 13484,0 | 7492,3 | 24531,4 | – | – | 5,7 |
| σ | 12,84 | 16,05 | – | – | – | – | – | – |
| σ^2 | 164,94 | 257,76 | – | – | – | – | – | – |

$$b = \frac{\overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{13484 - 155,8 \cdot 85,6}{7492,3 - 85,6^2} = \frac{147,52}{164,94} = 0,89;$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 155,8 - 0,89 \cdot 85,6 = 79,62.$$

Получено уравнение регрессии: $y = 79,62 + 0,89 \cdot x$.

С увеличением среднедушевого прожиточного минимума на 1 руб. среднедневная заработная плата возрастает в среднем на 0,89 руб.

2. Тесноту линейной связи оценит коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,89 \cdot \frac{12,84}{16,05} = 0,712; \quad r_{xy}^2 = 0,51.$$

Это означает, что 51% вариации заработной платы (y) объясняется вариацией фактора x – среднедушевого прожиточного минимума.

Качество модели определяет средняя ошибка аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum A_i = \frac{68,9}{12} = 5,74\%.$$

Качество построенной модели оценивается как хорошее, так как \bar{A} не превышает 8-10%.

3. Оценку значимости уравнения регрессии в целом проведем с помощью F -критерия Фишера. Фактическое значение F -критерия:

$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2} \cdot (n-2) = \frac{0,51}{1-0,51} \cdot 10 = 10,41.$$

Табличное значение критерия при пятипроцентном уровне значимости и степенях свободы $k_1 = 1$ и $k_2 = 12 - 2 = 10$ составляет $F_{\text{табл}} = 4,96$. Так как $F_{\text{факт}} = 10,41 > F_{\text{табл}} = 4,96$, то уравнение регрессии признается статистически значимым.

Оценку статистической значимости параметров регрессии проведем с помощью t -статистики Стьюдента и путем расчета доверительного интервала каждого из показателей.

Табличное значение t -критерия для числа степеней свободы $df = n - 2 = 12 - 2 = 10$ и $\alpha = 0,05$ составит $t_{\text{табл}} = 2,23$.

Определим случайные ошибки m_a , m_b ,

$$m_{r_{xy}} : m_a = S_{\text{ост}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{n \cdot \sigma_x} = 12,6 \cdot \frac{\sqrt{89907}}{12 \cdot 12,84} = 24,5;$$

$$m_b = \frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}} = \frac{12,6}{12,95 \cdot \sqrt{12}} = 0,281; m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,51}{12-2}} = 0,219.$$

$$\text{Тогда, } t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{79,616}{24,6} = 3,2; t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{0,89}{0,281} = 3,2; t_{r_{xy}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}} = \frac{0,712}{0,219} = 3,3$$

Фактические значения t -статистики превосходят табличное значение:

$$t_a = 3,2 > t_{\text{табл}} = 2,3; \quad t_b = 3,3 > t_{\text{табл}} = 2,3; \quad t_{r_{xy}} = 3,3 > t_{\text{табл}} = 2,3,$$

поэтому параметры a , b и r_{xy} не случайно отличаются от нуля, а статистически значимы.

Рассчитаем доверительные интервалы для параметров регрессии a и b . Для этого определим предельную ошибку для каждого показателя:

$$\Delta_a = t_{\text{табл}} \cdot m_a = 2,23 \cdot 24,5 = 54,64;$$

$$\Delta_b = t_{\text{табл}} \cdot m_b = 2,23 \cdot 0,281 = 0,62.$$

Доверительные интервалы

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a = 79,62 \pm 54,64; \gamma_{a_{\min}} = 79,62 - 54,64 = 24,98;$$

$$\gamma_{a_{\max}} = 79,62 + 54,64 = 134,26; \gamma_b = b \pm \Delta_b = 0,89 \pm 0,62;$$

$$\gamma_{b_{\min}} = 0,89 - 0,62 = 0,27; \gamma_{b_{\max}} = 0,89 + 0,62 = 1,51.$$

Анализ верхней и нижней границ доверительных интервалов приводит к выводу о том, что с вероятностью $p = 1 - \alpha = 0,95$ параметры a и b , находясь в указанных границах, не принимают нулевых значений, т.е. не являются статистически незначимыми и существенно отличны от нуля.

4. Полученные оценки уравнения регрессии позволяют использовать его для прогноза. Если прогнозное значение прожиточного минимума составит: $x_p = \bar{x} \cdot 1,07 = 85,6 \cdot 1,07 = 91,6$ руб., тогда прогнозное значение заработной платы составит: $\bar{y}_p = 79,62 + 0,89 \cdot 91,6 = 161,14$ руб.

5. Ошибка прогноза составит:

$$m_{\hat{y}_p} = S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = 12,6 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(91,6 - 85,6)^2}{12 \cdot 12,84^2}} = 13,22 \cdot$$

Предельная ошибка прогноза, которая в 95% случаев не будет превышена, составит:

$$\Delta_{\hat{y}_p} = t_{\text{табл}} \cdot m_{\hat{y}_p} = 2,23 \cdot 13,22 = 29,48.$$

Доверительный интервал прогноза:

$$\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p} = 161,14 \pm 29,48; \gamma_{\hat{y}_{p\min}} = 161,14 - 29,48 = 131,66 \text{ руб.};$$

$$\gamma_{\hat{y}_{p\max}} = 161,14 + 29,48 = 190,62 \text{ руб.}$$

Выполненный прогноз среднемесячной заработной платы является надежным ($p = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$) и находится в пределах от 131,66 руб. до 190,62 руб.

6. В заключение решения задачи построим на одном графике исходные данные и теоретическую прямую (рис. 1):

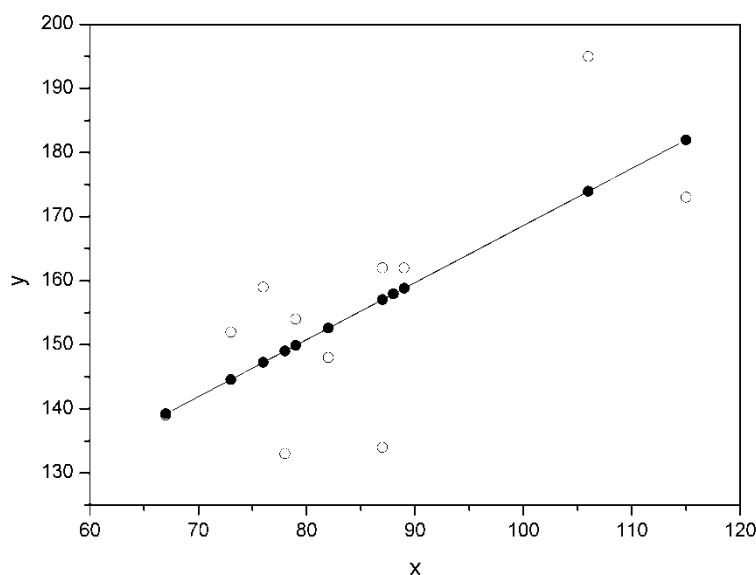


Рис. 1.

1.1 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1. По территориям региона приводятся данные за 201X г. (см. таблицу своего варианта).

Требуется:

1. Построить линейное уравнение парной регрессии y от x .
2. Рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и среднюю ошибку аппроксимации.
3. Оценить статистическую значимость параметров регрессии и корреляции с помощью F -критерия Фишера и t -критерия Стьюдента.
4. Выполнить прогноз заработной платы y при прогнозном значении среднедушевого прожиточного минимума x , составляющем 107% от среднего уровня.
5. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.
6. На одном графике построить данные и теоретическую прямую.
7. Найти коэффициенты корреляции и детерминации.

Вариант 1

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 81 | 124 |
| 2 | 77 | 131 |
| 3 | 85 | 146 |
| 4 | 79 | 139 |
| 5 | 93 | 143 |
| 6 | 100 | 159 |
| 7 | 72 | 135 |
| 8 | 90 | 152 |
| 9 | 71 | 127 |
| 10 | 89 | 154 |
| 11 | 82 | 127 |
| 12 | 111 | 162 |

Вариант 2

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 74 | 122 |
| 2 | 81 | 134 |
| 3 | 90 | 136 |

| | | |
|----|-----|-----|
| 4 | 79 | 125 |
| 5 | 89 | 120 |
| 6 | 87 | 127 |
| 7 | 77 | 125 |
| 8 | 93 | 148 |
| 9 | 70 | 122 |
| 10 | 93 | 157 |
| 11 | 87 | 144 |
| 12 | 121 | 165 |

Вариант 3

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., <i>x</i> | Среднедневная заработная плата, руб., <i>y</i> |
|---------------|---|--|
| 1 | 77 | 123 |
| 2 | 85 | 152 |
| 3 | 79 | 140 |
| 4 | 93 | 142 |
| 5 | 89 | 157 |
| 6 | 81 | 181 |
| 7 | 79 | 133 |
| 8 | 97 | 163 |
| 9 | 73 | 134 |
| 10 | 95 | 155 |
| 11 | 84 | 132 |
| 12 | 108 | 165 |

Вариант 4

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., <i>x</i> | Среднедневная заработная плата, руб., <i>y</i> |
|---------------|---|--|
| 1 | 83 | 137 |
| 2 | 88 | 142 |
| 3 | 75 | 128 |
| 4 | 89 | 140 |
| 5 | 85 | 133 |
| 6 | 79 | 153 |
| 7 | 81 | 142 |
| 8 | 97 | 154 |
| 9 | 79 | 132 |
| 10 | 90 | 150 |
| 11 | 84 | 132 |
| 12 | 112 | 166 |

Вариант 5

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 79 | 134 |
| 2 | 91 | 154 |
| 3 | 77 | 128 |
| 4 | 87 | 138 |
| 5 | 84 | 133 |
| 6 | 76 | 144 |
| 7 | 84 | 160 |
| 8 | 94 | 149 |
| 9 | 79 | 125 |
| 10 | 98 | 163 |
| 11 | 81 | 120 |
| 12 | 115 | 162 |

Вариант 6

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 92 | 147 |
| 2 | 78 | 133 |
| 3 | 79 | 128 |
| 4 | 88 | 152 |
| 5 | 87 | 138 |
| 6 | 75 | 122 |
| 7 | 81 | 145 |
| 8 | 96 | 141 |
| 9 | 80 | 127 |
| 10 | 102 | 151 |
| 11 | 83 | 129 |
| 12 | 94 | 147 |

Вариант 7

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 75 | 133 |

| | | |
|----|-----|-----|
| 2 | 78 | 125 |
| 3 | 81 | 129 |
| 4 | 93 | 153 |
| 5 | 86 | 140 |
| 6 | 77 | 135 |
| 7 | 83 | 141 |
| 8 | 94 | 152 |
| 9 | 88 | 133 |
| 10 | 99 | 156 |
| 11 | 80 | 124 |
| 12 | 112 | 156 |

Вариант 8

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 69 | 124 |
| 2 | 83 | 133 |
| 3 | 92 | 146 |
| 4 | 97 | 153 |
| 5 | 88 | 138 |
| 6 | 93 | 159 |
| 7 | 74 | 145 |
| 8 | 79 | 152 |
| 9 | 105 | 168 |
| 10 | 99 | 154 |
| 11 | 85 | 127 |
| 12 | 94 | 155 |

Вариант 9

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 78 | 133 |
| 2 | 94 | 139 |
| 3 | 85 | 141 |
| 4 | 73 | 127 |
| 5 | 91 | 154 |
| 6 | 88 | 142 |
| 7 | 73 | 122 |
| 8 | 82 | 135 |
| 9 | 99 | 142 |
| 10 | 113 | 168 |

| | | |
|----|----|-----|
| 11 | 69 | 124 |
| 12 | 83 | 130 |

Вариант 10

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 97 | 161 |
| 2 | 73 | 131 |
| 3 | 79 | 135 |
| 4 | 99 | 147 |
| 5 | 86 | 139 |
| 6 | 91 | 151 |
| 7 | 85 | 135 |
| 8 | 77 | 132 |
| 9 | 89 | 161 |
| 10 | 95 | 159 |
| 11 | 72 | 120 |
| 12 | 115 | 160 |

2. МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Пример. По 20 предприятиям региона изучается зависимость выработки продукции на одного работника y (тыс. руб.) от ввода в действие новых основных фондов x_1 (% от стоимости фондов на конец года) и от удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих x_2 (%).

| Номер предприятия | y | x_1 | x_2 | Номер предприятия | y | x_1 | x_2 |
|-------------------|------|-------|-------|-------------------|------|-------|-------|
| 1 | 7,0 | 3,9 | 10,0 | 11 | 9,0 | 6,0 | 21,0 |
| 2 | 7,0 | 3,9 | 14,0 | 12 | 11,0 | 6,4 | 22,0 |
| 3 | 7,0 | 3,7 | 15,0 | 13 | 9,0 | 6,8 | 22,0 |
| 4 | 7,0 | 4,0 | 16,0 | 14 | 11,0 | 7,2 | 25,0 |
| 5 | 7,0 | 3,8 | 17,0 | 15 | 12,0 | 8,0 | 28,0 |
| 6 | 7,0 | 4,8 | 19,0 | 16 | 12,0 | 8,2 | 29,0 |
| 7 | 8,0 | 5,4 | 19,0 | 17 | 12,0 | 8,1 | 30,0 |
| 8 | 8,0 | 4,4 | 20,0 | 18 | 12,0 | 8,5 | 31,0 |
| 9 | 8,0 | 5,3 | 20,0 | 19 | 14,0 | 9,6 | 32,0 |
| 10 | 10,0 | 6,8 | 20,0 | 20 | 14,0 | 9,0 | 36,0 |

Требуется:

1. Построить линейную модель множественной регрессии. Записать стандартизованное уравнение множественной регрессии. На основе стандартизованных коэффициентов регрессии и средних коэффициентов эластичности ранжировать факторы по степени их влияния на результат.

2. Найти коэффициенты парной, частной и множественной корреляции. Проанализировать их.

3. Найти скорректированный коэффициент множественной детерминации. Сравнить его с нескорректированным (общим) коэффициентом детерминации.

4. С помощью F - критерия Фишера оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента детерминации $R^2_{yx_1x_2}$.

5. С помощью частных F - критериев Фишера оценить целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1 .

6. Составить уравнение линейной парной регрессии, оставив лишь один значащий фактор.

Решение

Для удобства проведения расчетов поместим результаты промежуточных расчетов в таблицу:

| № | y | x_1 | x_2 | yx_1 | yx_2 | x_1x_2 | x_1^2 | x_2^2 | y^2 |
|----|------|-------|-------|--------|--------|----------|---------|---------|-------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 7,0 | 3,9 | 10,0 | 27,3 | 70,0 | 39,0 | 15,21 | 100,0 | 49,0 |
| 2 | 7,0 | 3,9 | 14,0 | 27,3 | 98,0 | 54,6 | 15,21 | 196,0 | 49,0 |
| 3 | 7,0 | 3,7 | 15,0 | 25,9 | 105,0 | 55,5 | 13,69 | 225,0 | 49,0 |
| 4 | 7,0 | 4,0 | 16,0 | 28,0 | 112,0 | 64,0 | 16,0 | 256,0 | 49,0 |
| 5 | 7,0 | 3,8 | 17,0 | 26,6 | 119,0 | 64,6 | 14,44 | 289,0 | 49,0 |
| 6 | 7,0 | 4,8 | 19,0 | 33,6 | 133,0 | 91,2 | 23,04 | 361,0 | 49,0 |
| 7 | 8,0 | 5,4 | 19,0 | 43,2 | 152,0 | 102,6 | 29,16 | 361,0 | 64,0 |
| 8 | 8,0 | 4,4 | 20,0 | 35,2 | 160,0 | 88,0 | 19,36 | 400,0 | 64,0 |
| 9 | 8,0 | 5,3 | 20,0 | 42,4 | 160,0 | 106,0 | 28,09 | 400,0 | 64,0 |
| 10 | 10,0 | 6,8 | 20,0 | 68,0 | 200,0 | 136,0 | 46,24 | 400,0 | 100,0 |
| 11 | 9,0 | 6,0 | 21,0 | 54,0 | 189,0 | 126,0 | 36,0 | 441,0 | 81,0 |
| 12 | 11,0 | 6,4 | 22,0 | 70,4 | 242,0 | 140,8 | 40,96 | 484,0 | 121,0 |
| 13 | 9,0 | 6,8 | 22,0 | 61,2 | 198,0 | 149,6 | 46,24 | 484,0 | 81,0 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 14 | 11,0 | 7,2 | 25,0 | 79,2 | 275,0 | 180,0 | 51,84 | 625,0 | 121,0 |
| 15 | 12,0 | 8,0 | 28,0 | 96,0 | 336,0 | 224,0 | 64,0 | 784,0 | 144,0 |
| 16 | 12,0 | 8,2 | 29,0 | 98,4 | 348,0 | 237,8 | 67,24 | 841,0 | 144,0 |
| 17 | 12,0 | 8,1 | 30,0 | 97,2 | 360,0 | 243,0 | 65,61 | 900,0 | 144,0 |

| | | | | | | | | | |
|-----------|------|-------|------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|
| 18 | 12,0 | 8,5 | 31,0 | 102,0 | 372,0 | 263,5 | 72,25 | 961,0 | 144,0 |
| 19 | 14,0 | 9,6 | 32,0 | 134,4 | 448,0 | 307,2 | 92,16 | 1024,0 | 196,0 |
| 20 | 14,0 | 9,0 | 36,0 | 126,0 | 504,0 | 324,0 | 81,0 | 1296,0 | 196,0 |
| Сумма | 192 | 123,8 | 446 | 1276,3 | 4581 | 2997,4 | 837,7 | 10828,0 | 1958,0 |
| Ср. знач. | 9,6 | 6,19 | 22,3 | 63,815 | 229,05 | 149,87 | 41,887 | 541,4 | 97,9 |

Найдем средние квадратические отклонения признаков:

$$\sigma_y = \sqrt{y^2 - \bar{y}^2} = \sqrt{97,9 - 9,6^2} = 2,396;$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{x_1^2 - \bar{x}_1^2} = \sqrt{41,887 - 6,19^2} = 1,890;$$

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{x_2^2 - \bar{x}_2^2} = \sqrt{541,4 - 22,3^2} = 6,642.$$

1. Вычисление параметров линейного уравнения множественной регрессии.

Для нахождения параметров линейного уравнения множественной регрессии

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2$$

необходимо решить следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров a , b_1 , b_2 :

$$\begin{cases} na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 = \sum y; \\ a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1x_2 = \sum yx_1; \\ a \sum x_2 + b_1 \sum x_1x_2 + b_2 \sum x_2^2 = \sum yx_2 \end{cases}$$

либо воспользоваться готовыми формулами:

$$b_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} \cdot \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}; \quad b_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} \cdot \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2};$$

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2.$$

Рассчитаем сначала парные коэффициенты корреляции:

$$r_{yx_1} = \frac{\text{cov}(y, x_1)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{63,815 - 6,19 \cdot 9,6}{1,890 \cdot 2,396} = 0,970;$$

$$r_{yx_2} = \frac{\text{cov}(y, x_2)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{229,05 - 22,3 \cdot 9,6}{6,642 \cdot 2,396} = 0,941;$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{149,87 - 6,19 \cdot 22,3}{1,890 \cdot 6,642} = 0,943.$$

Находим

$$b_1 = \frac{2,396}{1,890} \cdot \frac{0,970 - 0,941 \cdot 0,943}{1 - 0,943^2} = 0,946;$$

$$b_2 = \frac{2,396}{6,642} \cdot \frac{0,941 - 0,970 \cdot 0,943}{1 - 0,943^2} = 0,0856;$$

$$a = 9,6 - 0,946 \cdot 6,19 - 0,0856 \cdot 22,3 = 1,835.$$

Таким образом, получили следующее уравнение множественной регрессии:

$$y = 1,835 + 0,946 \cdot x_1 + 0,0856 \cdot x_2.$$

Коэффициенты β_1 и β_2 стандартизованного уравнения регрессии $t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \varepsilon$, находятся по формулам:

$$\beta_1 = b_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_y} = 0,946 \cdot \frac{1,890}{2,396} = 0,746; \beta_2 = b_2 \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = 0,0856 \cdot \frac{6,642}{2,396} = 0,237.$$

Т.е. уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{t}_y = 0,746 \cdot t_{x_1} + 0,237 \cdot t_{x_2}.$$

Так как стандартизованные коэффициенты регрессии можно сравнивать между собой, то можно сказать, что ввод в действие новых основных фондов оказывает большее влияние на выработку продукции, чем удельный вес рабочих высокой квалификации.

Сравнивать влияние факторов на результат можно также при помощи средних коэффициентов эластичности: $\bar{\varepsilon}_i = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_i}$.

$$\text{Вычисляем: } \bar{\varepsilon}_1 = 0,946 \cdot \frac{6,19}{9,6} = 0,61; \bar{\varepsilon}_2 = 0,0856 \cdot \frac{22,3}{9,6} = 0,20.$$

Т.е. увеличение только основных фондов (от своего среднего значения) или только удельного веса рабочих высокой квалификации на 1% увеличивает в среднем выработку продукции на 0,61% или 0,20% соответственно. Таким образом, подтверждается большее влияние на результат у фактора x_1 , чем фактора x_2 .

2. Коэффициенты парной корреляции мы уже нашли:

$$r_{yx_1} = 0,970; \quad r_{yx_2} = 0,941; \quad r_{x_1x_2} = 0,943.$$

Они указывают на весьма сильную связь каждого фактора с результатом, а также высокую межфакторную зависимость (факторы x_1 и x_2 явно коллинеарны, т.к. $r_{x_1x_2} = 0,943 > 0,7$). При такой сильной межфакторной зависимости рекомендуется один из факторов исключить из рассмотрения.

Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при элиминировании (устранении влияния) других факторов, включенных в уравнение регрессии.

При двух факторах частные коэффициенты корреляции рассчитываются следующим образом:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2) \cdot (1 - r_{x_1 x_2}^2)}} = \frac{0,970 - 0,941 \cdot 0,943}{\sqrt{(1 - 0,941^2) \cdot (1 - 0,943^2)}} = 0,734;$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_1}^2) \cdot (1 - r_{x_1 x_2}^2)}} = \frac{0,941 - 0,970 \cdot 0,943}{\sqrt{(1 - 0,970^2) \cdot (1 - 0,943^2)}} = 0,325.$$

Если сравнить коэффициенты парной и частной корреляции, то можно увидеть, что из-за высокой межфакторной зависимости коэффициенты парной корреляции дают завышенные оценки тесноты связи. Именно по этой причине рекомендуется при наличии сильной коллинеарности (взаимосвязи) факторов исключать из исследования тот фактор, у которого теснота парной зависимости меньше, чем теснота межфакторной связи.

Коэффициент множественной корреляции определить через матрицу парных коэффициентов корреляции:

$$R_{yx_1 x_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta_r}{\Delta_{r_{11}}}},$$

где

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1 x_2} \\ r_{yx_2} & r_{x_2 x_1} & 1 \end{vmatrix}$$

– определитель матрицы парных коэффициентов корреляции;

$$\Delta_{r_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} \\ r_{x_2 x_1} & 1 \end{vmatrix}$$

– определитель матрицы межфакторной корреляции.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & 0,970 & 0,941 \\ 0,970 & 1 & 0,943 \\ 0,941 & 0,943 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0,8607 + 0,8607 -$$

$$-0,8855 - 0,8892 - 0,9409 = 0,0058$$

$$\Delta_{r_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & 0,943 \\ 0,943 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0,8892 = 0,1108.$$

Коэффициент множественной корреляции

$$R_{yx_1 x_2} = \sqrt{1 - \frac{0,0058}{0,1108}} = 0,973.$$

Аналогичный результат получим при использовании других формул:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{0,305}{5,74}} = 0,973;$$

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}} = \sqrt{0,746 \cdot 0,970 + 0,237 \cdot 0,941} = 0,973;$$

$$\begin{aligned} R_{yx_1x_2 \dots x_m} &= \sqrt{1 - (1 - r_{yx_1}^2) \cdot (1 - r_{yx_2 \dots x_1}^2)} = \\ &= \sqrt{1 - (1 - 0,970^2) \cdot (1 - 0,325^2)} = 0,973 \end{aligned}$$

Коэффициент множественной корреляции показывает на весьма сильную связь всего набора факторов с результатом.

3. Нескорректированный коэффициент множественной детерминации $R_{yx_1x_2}^2 = 0,947$ оценивает долю вариации результата за счет представленных в уравнении факторов в общей вариации результата. Здесь эта доля составляет 94,7% и указывает на весьма высокую степень обусловленности вариации результата вариацией факторов, иными словами – на весьма тесную связь факторов с результатом.

Скорректированный коэффициент множественной детерминации

$$R^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{(n-1)}{(n-m-1)} = 1 - (1 - 0,947) \frac{20-1}{20-2-1} = 0,941$$

определяет тесноту связи с учетом степеней свободы общей и остаточной дисперсий. Он дает такую оценку тесноты связи, которая не зависит от числа факторов и поэтому может сравниваться по разным моделям с разным числом факторов. Оба коэффициента указывают на весьма высокую (более 94%) детерминированность результата y в модели факторами x_1 и x_2 .

4. Оценку надежности уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи $R_{yx_1x_2}$ дает F -критерий Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}.$$

В нашем случае фактическое значение F -критерия Фишера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{0,973^2}{1 - 0,973^2} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 151,88.$$

Получили, что $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}} = 3,49$ (при $n = 20$), т.е. вероятность случайно получить такое значение F -критерия не превышает допустимый уровень значимости 5%. Следовательно, полученное значение не случайно, оно сформировалось под влиянием существенных факторов, т.е. подтверждается статистическая значимость всего уравнения и показателя тесноты связи $R_{yx_1x_2}^2$.

5. С помощью частных F -критериев Фишера оценим целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1 при помощи формул:

$$F_{\text{част}, x_1} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_2}}{1 - R^2_{yx_1}} \cdot \frac{n - m - 1}{m};$$

$$F_{\text{част}, x_2} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_1}}{1 - R^2_{yx_2}} \cdot \frac{n - m - 1}{m}.$$

Найдем $R^2_{yx_1}$ и $R^2_{yx_2}$.

$$R^2_{yx_1} = r^2_{yx_1} = 0,970^2 = 0,941; \quad R^2_{yx_2} = r^2_{yx_2} = 0,941^2 = 0,885.$$

Имеем

$$F_{\text{част}, x_1} = \frac{0,947 - 0,885}{1 - 0,941} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 8,9322;$$

$$F_{\text{част}, x_2} = \frac{0,947 - 0,941}{1 - 0,885} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 0,4435.$$

Получили, что $F_{\text{част}, x_2} < F_{\text{табл}} = 3,49$. Следовательно, включение в модель фактора x_2 после того, как в модель включен фактор x_1 статистически нецелесообразно: прирост факторной дисперсии за счет дополнительного признака x_2 оказывается незначительным, несущественным; фактор x_2 включать в уравнение после фактора x_1 не следует.

Если поменять первоначальный порядок включения факторов в модель и рассмотреть вариант включения x_1 после x_2 , то результат расчета частного F -критерия для x_1 будет иным. $F_{\text{част}, x_1} > F_{\text{табл}} = 3,49$, т.е. вероятность его случайного формирования меньше принятого стандарта $\alpha = 0,05$ (5%). Следовательно, значение частного F -критерия для дополнительно включенного фактора x_1 не случайно, является статистически значимым, надежным, достоверным: прирост факторной дисперсии за счет дополнительного фактора x_1 является существенным. Фактор x_1 должен присутствовать в уравнении, в том числе в варианте, когда он дополнительно включается после фактора x_2 .

6. Общий вывод состоит в том, что множественная модель с факторами x_1 и x_2 с $R^2_{yx_1x_2} = 0,947$ содержит неинформативный фактор x_2 . Если исключить фактор x_2 , то можно ограничиться уравнением парной регрессии:

$$\hat{y}_x = \alpha_0 + \alpha_1 x = 1,99 + 1,23 \cdot x, \quad r^2_{yx} = 0,941.$$

2.1 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

По 20 предприятиям региона изучается зависимость выработки продукции на одного работника y (тыс. руб.) от ввода в действие новых основных фондов x_1 (% от стоимости фондов на конец года) и от удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих x_2 (%) (смотри таблицу своего варианта).

Требуется:

1. Построить линейную модель множественной регрессии. Записать стандартизованное уравнение множественной регрессии. На основе стандартизованных коэффициентов регрессии и средних коэффициентов эластичности ранжировать факторы по степени их влияния на результат.

2. Найти коэффициенты парной, частной и множественной корреляции. Проанализировать их.

3. Найти скорректированный коэффициент множественной детерминации. Сравнить его с нескорректированным (общим) коэффициентом детерминации.

4. С помощью F -критерия Фишера оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента детерминации $R^2_{yx_1x_2}$.

5. С помощью частных F -критериев Фишера оценить целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1 .

6. Составить уравнение линейной парной регрессии, оставив лишь один значащий фактор.

Вариант 1

| Номер предприятия | y | x_1 | x_2 | Номер предприятия | y | x_1 | x_2 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------------------|-----|-------|-------|
| 1 | 7 | 3,7 | 9 | 11 | 11 | 6,3 | 22 |
| 2 | 7 | 3,7 | 11 | 12 | 11 | 6,4 | 22 |
| 3 | 7 | 3,9 | 11 | 13 | 11 | 7,2 | 23 |
| 4 | 7 | 4,1 | 15 | 14 | 12 | 7,5 | 25 |
| 5 | 8 | 4,2 | 17 | 15 | 12 | 7,9 | 27 |
| 6 | 8 | 4,9 | 19 | 16 | 13 | 8,1 | 30 |
| 7 | 8 | 5,3 | 19 | 17 | 13 | 8,4 | 31 |
| 8 | 9 | 5,1 | 20 | 18 | 13 | 8,6 | 32 |
| 9 | 10 | 5,6 | 20 | 19 | 14 | 9,5 | 35 |
| 10 | 10 | 6,1 | 21 | 20 | 15 | 9,5 | 36 |

Вариант 2

| Номер предприятия | y | x_1 | x_2 | Номер предприятия | y | x_1 | x_2 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------------------|-----|-------|-------|
| 1 | 7 | 3,5 | 9 | 11 | 10 | 6,3 | 22 |
| 2 | 7 | 3,6 | 10 | 12 | 10 | 6,5 | 22 |
| 3 | 7 | 3,9 | 12 | 13 | 11 | 7,2 | 24 |
| 4 | 7 | 4,1 | 17 | 14 | 12 | 7,5 | 25 |
| 5 | 8 | 4,2 | 18 | 15 | 12 | 7,9 | 27 |
| 6 | 8 | 4,5 | 19 | 16 | 13 | 8,2 | 30 |
| 7 | 9 | 5,3 | 19 | 17 | 13 | 8,4 | 31 |
| 8 | 9 | 5,5 | 20 | 18 | 14 | 8,6 | 33 |
| 9 | 10 | 5,6 | 21 | 19 | 14 | 9,5 | 35 |
| 10 | 10 | 6,1 | 21 | 20 | 15 | 9,6 | 36 |

Вариант 3

| Номер предприятия | y | x_1 | x_2 | Номер предприятия | y | x_1 | x_2 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------------------|-----|-------|-------|
| 1 | 7 | 3,6 | 9 | 11 | 10 | 6,3 | 21 |
| 2 | 7 | 3,6 | 11 | 12 | 11 | 6,9 | 23 |
| 3 | 7 | 3,7 | 12 | 13 | 11 | 7,2 | 24 |
| 4 | 8 | 4,1 | 16 | 14 | 12 | 7,8 | 25 |
| 5 | 8 | 4,3 | 19 | 15 | 13 | 8,1 | 27 |
| 6 | 8 | 4,5 | 19 | 16 | 13 | 8,2 | 29 |
| 7 | 9 | 5,4 | 20 | 17 | 13 | 8,4 | 31 |
| 8 | 9 | 5,5 | 20 | 18 | 14 | 8,8 | 33 |
| 9 | 10 | 5,8 | 21 | 19 | 14 | 9,5 | 35 |
| 10 | 10 | 6,1 | 21 | 20 | 14 | 9,7 | 34 |

Вариант 4

| Номер предприятия | y | x_1 | x_2 | Номер предприятия | y | x_1 | x_2 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------------------|-----|-------|-------|
| 1 | 7 | 3,5 | 9 | 11 | 10 | 6,3 | 21 |
| 2 | 7 | 3,6 | 10 | 12 | 10 | 6,8 | 22 |
| 3 | 7 | 3,8 | 14 | 13 | 11 | 7,2 | 24 |
| 4 | 7 | 4,2 | 15 | 14 | 12 | 7,9 | 25 |
| 5 | 8 | 4,3 | 18 | 15 | 12 | 8,1 | 26 |
| 6 | 8 | 4,7 | 19 | 16 | 13 | 8,3 | 29 |
| 7 | 9 | 5,4 | 19 | 17 | 13 | 8,4 | 31 |
| 8 | 9 | 5,6 | 20 | 18 | 13 | 8,8 | 32 |
| 9 | 10 | 5,9 | 20 | 19 | 14 | 9,6 | 35 |
| 10 | 10 | 6,1 | 21 | 20 | 14 | 9,7 | 36 |

Вариант 5

| Номер предприятия | y | x_1 | x_2 | Номер предприятия | y | x_1 | x_2 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------------------|-----|-------|-------|
| 1 | 7 | 3,8 | 11 | 11 | 10 | 6,8 | 21 |
| 2 | 7 | 3,8 | 12 | 12 | 11 | 7,4 | 23 |
| 3 | 7 | 3,9 | 16 | 13 | 11 | 7,8 | 24 |
| 4 | 7 | 4,1 | 17 | 14 | 12 | 7,5 | 26 |
| 5 | 7 | 4,6 | 18 | 15 | 12 | 7,9 | 28 |
| 6 | 8 | 4,5 | 18 | 16 | 12 | 8,1 | 30 |
| 7 | 8 | 5,3 | 19 | 17 | 13 | 8,4 | 31 |
| 8 | 9 | 5,5 | 20 | 18 | 13 | 8,7 | 32 |
| 9 | 9 | 6,1 | 20 | 19 | 13 | 9,5 | 33 |
| 10 | 10 | 6,8 | 21 | 20 | 14 | 9,7 | 35 |

Вариант 6

| Номер предприятия | y | x_1 | x_2 | Номер предприятия | y | x_1 | x_2 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------------------|-----|-------|-------|
| 1 | 7 | 3,8 | 9 | 11 | 11 | 7,1 | 22 |
| 2 | 7 | 4,1 | 14 | 12 | 11 | 7,5 | 23 |
| 3 | 7 | 4,3 | 16 | 13 | 12 | 7,8 | 25 |
| 4 | 7 | 4,1 | 17 | 14 | 12 | 7,6 | 27 |
| 5 | 8 | 4,6 | 17 | 15 | 12 | 7,9 | 29 |
| 6 | 8 | 4,7 | 18 | 16 | 13 | 8,1 | 30 |
| 7 | 9 | 5,3 | 20 | 17 | 13 | 8,5 | 32 |
| 8 | 9 | 5,5 | 20 | 18 | 14 | 8,7 | 32 |
| 9 | 11 | 6,9 | 21 | 19 | 14 | 9,6 | 33 |
| 10 | 10 | 6,8 | 21 | 20 | 15 | 9,8 | 36 |

Вариант 7

| Номер предприятия | y | x_1 | x_2 | Номер предприятия | y | x_1 | x_2 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------------------|-----|-------|-------|
| 1 | 7 | 3,9 | 12 | 11 | 11 | 7,1 | 22 |
| 2 | 7 | 4,2 | 13 | 12 | 12 | 7,5 | 25 |
| 3 | 7 | 4,3 | 15 | 13 | 13 | 7,8 | 26 |
| 4 | 7 | 4,4 | 17 | 14 | 12 | 7,9 | 27 |
| 5 | 8 | 4,6 | 18 | 15 | 13 | 8,1 | 30 |
| 6 | 8 | 4,8 | 19 | 16 | 13 | 8,4 | 31 |
| 7 | 9 | 5,3 | 19 | 17 | 13 | 8,6 | 32 |
| 8 | 9 | 5,7 | 20 | 18 | 14 | 8,8 | 32 |
| 9 | 10 | 6,9 | 21 | 19 | 14 | 9,6 | 34 |

| | | | | | | | |
|----|----|-----|----|----|----|-----|----|
| 10 | 10 | 6,8 | 21 | 20 | 14 | 9,9 | 36 |
|----|----|-----|----|----|----|-----|----|

Вариант 8

| Номер предприятия | y | x_1 | x_2 | Номер предприятия | y | x_1 | x_2 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------------------|-----|-------|-------|
| 1 | 7 | 3,6 | 12 | 11 | 10 | 7,2 | 23 |
| 2 | 7 | 4,1 | 14 | 12 | 11 | 7,6 | 25 |
| 3 | 7 | 4,3 | 16 | 13 | 12 | 7,8 | 26 |
| 4 | 7 | 4,4 | 17 | 14 | 11 | 7,9 | 28 |
| 5 | 7 | 4,5 | 18 | 15 | 12 | 8,2 | 30 |
| 6 | 8 | 4,8 | 19 | 16 | 12 | 8,4 | 31 |
| 7 | 8 | 5,3 | 20 | 17 | 12 | 8,6 | 32 |
| 8 | 8 | 5,6 | 20 | 18 | 13 | 8,8 | 32 |
| 9 | 9 | 6,7 | 21 | 19 | 13 | 9,2 | 33 |
| 10 | 10 | 6,9 | 22 | 20 | 14 | 9,6 | 34 |

3. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Пример. Пусть имеются некоторые условные данные об общем количестве правонарушений на таможне одного из субъектов РФ.

Таблица 1

| Год | Квартал | t | Количество возбужденных дел, y_t |
|------|---------|-----|------------------------------------|
| 2000 | I | 1 | 375 |
| | II | 2 | 371 |
| | III | 3 | 869 |
| | IV | 4 | 1015 |
| 2001 | I | 5 | 357 |
| | II | 6 | 471 |
| | III | 7 | 992 |
| | IV | 8 | 1020 |
| 2002 | I | 9 | 390 |
| | II | 10 | 355 |
| | III | 11 | 992 |
| | IV | 12 | 905 |
| 2003 | I | 13 | 461 |
| | II | 14 | 454 |
| | III | 15 | 920 |
| | IV | 16 | 927 |

Построим поле корреляции:

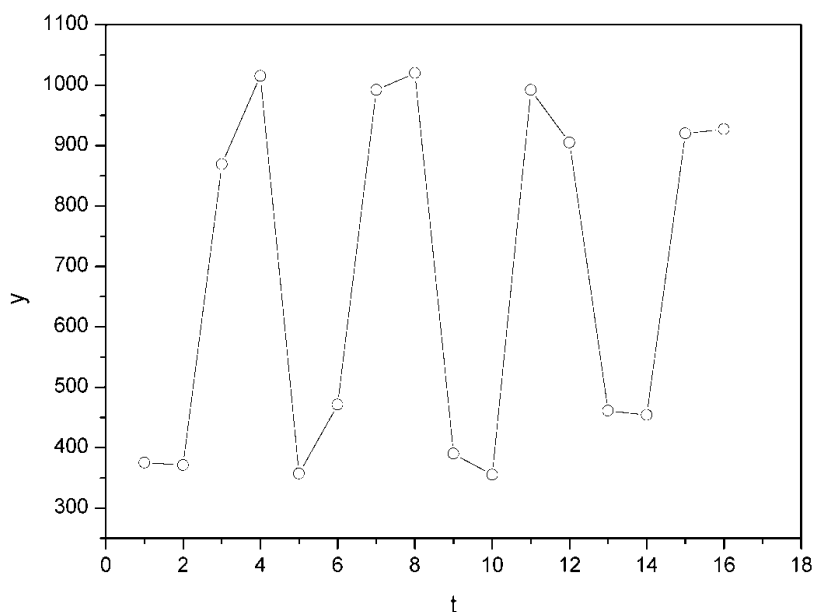


Рис. 1.

Уже исходя из графика видно, что значения y образуют пилообразную фигуру. Рассчитаем несколько последовательных коэффициентов автокорреляции. Для этого составляем первую вспомогательную таблицу.

Таблица 2

| t | y_t | y_{t-1} | $y_t - \bar{y}_1$ | $y_{t-1} - \bar{y}_2$ | $(y_t - \bar{y}_1) \times (y_{t-1} - \bar{y}_2)$ | $(y_t - \bar{y}_1)^2$ | $(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2$ |
|----------|----------|-----------|-------------------|-----------------------|--|-----------------------|---------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 375 | — | — | — | — | — | — |
| 2 | 371 | 375 | -328,33 | -288,13 | 94601,72 | 107800,59 | 83018,90 |
| 3 | 869 | 371 | 169,67 | -292,13 | -49565,70 | 28787,91 | 85339,94 |
| 4 | 1015 | 869 | 315,67 | 205,87 | 64986,98 | 99647,55 | 42382,46 |
| 5 | 357 | 1015 | -342,33 | 351,87 | -120455,66 | 117189,83 | 123812,50 |
| 6 | 471 | 357 | -228,33 | -306,13 | 69898,66 | 52134,59 | 93715,58 |
| 7 | 992 | 471 | 292,67 | -192,13 | -56230,69 | 85655,73 | 36913,94 |
| 8 | 1020 | 992 | 320,67 | 328,87 | 105458,74 | 102829,25 | 108155,48 |
| 9 | 390 | 1020 | -309,33 | 356,87 | -110390,60 | 95685,05 | 127356,20 |
| 10 | 355 | 390 | -344,33 | -273,13 | 94046,85 | 118563,15 | 74600,00 |
| 11 | 992 | 355 | 292,67 | -308,13 | -90180,41 | 85655,73 | 94944,10 |
| 12 | 905 | 992 | 205,67 | 328,87 | 67638,69 | 42300,15 | 108155,48 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 13 | 461 | 905 | -238,33 | 241,87 | -57644,88 | 56801,19 | 58501,10 |
| 14 | 454 | 461 | -245,33 | -202,13 | 49588,55 | 60186,81 | 40856,54 |
| 15 | 920 | 454 | 220,67 | -209,13 | -46148,72 | 48695,25 | 43735,36 |
| 16 | 927 | 920 | 227,67 | 256,87 | 58481,59 | 51833,63 | 65982,20 |

| | | | | | | | |
|------------------|--------|--------|------|------|----------|------------|------------|
| Сумма | 10499 | 9947 | 9,05 | 0,05 | 74085,16 | 1153766,39 | 1187469,73 |
| Среднее значение | 699,33 | 663,13 | – | – | – | – | – |

Следует заметить, что среднее значение получается путем деления не на 16, а на 15, т.к. у нас теперь на одно наблюдение меньше.

Теперь вычисляем коэффициент автокорреляции первого порядка формуле:

$$r_1 = \frac{74085,16}{\sqrt{1153756,39 \cdot 1187469,73}} = 0,063294.$$

Составляем вспомогательную таблицу для расчета коэффициента автокорреляции второго порядка.

Таблица 3

| t | y_t | y_{t-2} | $y_t - \bar{y}_3$ | $y_{t-2} - \bar{y}_4$ | $(y_t - \bar{y}_3) \times (y_{t-2} - \bar{y}_4)$ | $(y_t - \bar{y}_3)^2$ | $(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2$ |
|------------------|----------|-----------|-------------------|-----------------------|--|-----------------------|---------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 375 | – | – | – | – | – | – |
| 2 | 371 | – | – | – | – | – | – |
| 3 | 869 | 375 | 145,57 | -269,79 | -39273,33 | 21190,62 | 72786,64 |
| 4 | 1015 | 371 | 291,57 | -273,79 | -79828,95 | 85013,06 | 74960,96 |
| 5 | 357 | 869 | -366,43 | 224,21 | -82157,27 | 134270,94 | 50270,12 |
| 6 | 471 | 1015 | -252,43 | 370,21 | -93452,11 | 63720,90 | 137055,44 |
| 7 | 992 | 357 | 268,57 | -287,79 | -77291,76 | 72129,84 | 82823,08 |
| 8 | 1020 | 471 | 296,57 | -173,79 | -51540,90 | 87953,76 | 30202,96 |
| 9 | 390 | 992 | -333,43 | 347,21 | -115770,23 | 111175,56 | 120554,78 |
| 10 | 355 | 1020 | -368,43 | 375,21 | -138238,62 | 135740,66 | 140782,54 |
| 11 | 992 | 390 | 268,57 | -254,79 | -68428,95 | 72129,84 | 64917,94 |
| 12 | 905 | 355 | 181,57 | -289,79 | -52617,17 | 32967,66 | 83978,24 |
| 13 | 461 | 992 | -262,43 | 347,21 | -91118,32 | 68869,50 | 120554,78 |
| 14 | 454 | 905 | -269,43 | 260,21 | -70108,38 | 72592,52 | 67709,24 |
| 15 | 920 | 461 | 196,57 | -183,79 | -36127,60 | 38639,76 | 33778,76 |
| 16 | 927 | 454 | 203,57 | -190,79 | -38839,12 | 41440,74 | 36400,82 |
| Сумма | 10128 | 9027 | -0,02 | -0,06 | -1034792,71 | 1037835,43 | 1116776,36 |
| Среднее значение | 723,43 | 644,79 | – | – | – | – | – |

Следовательно, $r_2 = \frac{-1034792,71}{\sqrt{1037835,43 \cdot 1116776,36}} = -0,961183.$

Аналогично находим коэффициенты автокорреляции более высоких порядков, а все полученные значения заносим в сводную таблицу.

Таблица 4

| Лаг | Коэффициент автокорреляции уровней |
|-----|------------------------------------|
| 1 | 0,063294 |
| 2 | -0,961183 |
| 3 | -0,036290 |
| 4 | 0,964735 |
| 5 | 0,050594 |
| 6 | -0,976516 |
| 7 | -0,069444 |
| 8 | 0,964629 |
| 9 | 0,162064 |
| 10 | -0,972918 |
| 11 | -0,065323 |
| 12 | 0,985761 |

Коррелограмма:

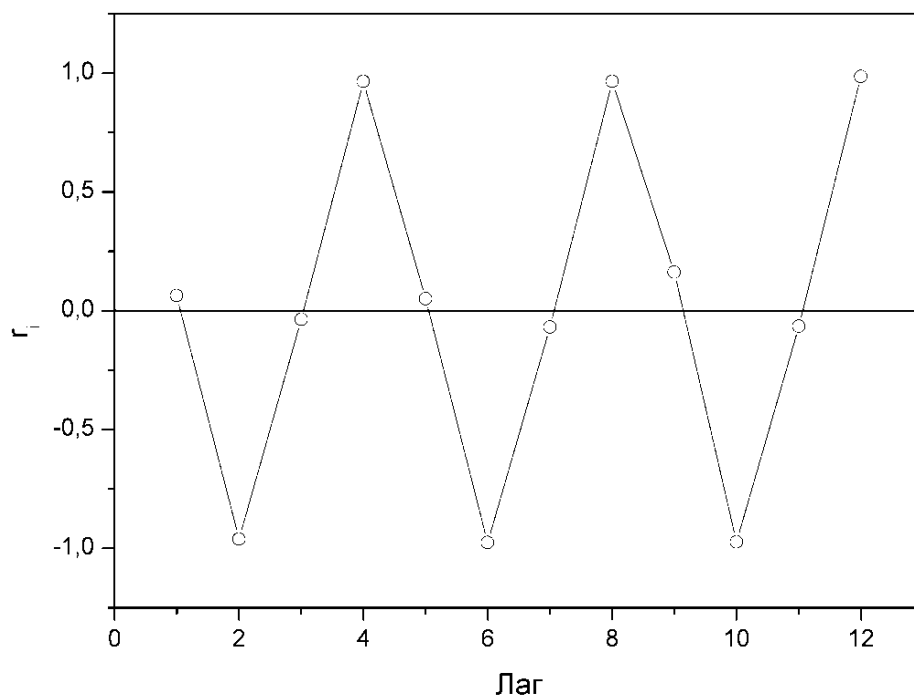


Рис. 5.

Анализ коррелограммы и графика исходных уровней временного ряда позволяет сделать вывод о наличии в изучаемом временном ряде сезонных колебаний периодичностью в четыре квартала.

3.1 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Имеются условные данные об объемах потребления электроэнергии (y_t) жителями региона за 16 кварталов.

Требуется:

1. Построить автокорреляционную функцию и сделать вывод о наличии сезонных колебаний.
2. Построить аддитивную модель временного ряда (для нечетных вариантов) или мультипликативную модель временного ряда (для четных вариантов).
3. Сделать прогноз на 2 квартала вперед.

Варианты 1,2

| t | y_t | t | y_t |
|-----|-------|-----|-------|
| 1 | 5,8 | 9 | 7,9 |
| 2 | 4,5 | 10 | 5,5 |
| 3 | 5,1 | 11 | 6,3 |
| 4 | 9,1 | 12 | 10,8 |
| 5 | 7,0 | 13 | 9,0 |
| 6 | 5,0 | 14 | 6,5 |
| 7 | 6,0 | 15 | 7,0 |
| 8 | 10,1 | 16 | 11,1 |

Варианты 3, 4

| t | y_t | t | y_t |
|-----|-------|-----|-------|
| 1 | 5,5 | 9 | 8,0 |
| 2 | 4,6 | 10 | 5,6 |
| 3 | 5,0 | 11 | 6,4 |
| 4 | 9,2 | 12 | 10,9 |
| 5 | 7,1 | 13 | 9,1 |
| 6 | 5,1 | 14 | 6,4 |
| 7 | 5,9 | 15 | 7,2 |
| 8 | 10,0 | 16 | 11,0 |

Варианты 5, 6

| t | y_t | t | y_t |
|-----|-------|-----|-------|
| 1 | 5,3 | 9 | 8,2 |
| 2 | 4,7 | 10 | 5,5 |
| 3 | 5,2 | 11 | 6,5 |
| 4 | 9,1 | 12 | 11,0 |
| 5 | 7,0 | 13 | 8,9 |
| 6 | 5,0 | 14 | 6,5 |
| 7 | 6,0 | 15 | 7,3 |
| 8 | 10,1 | 16 | 11,2 |

Варианты 7, 8

| t | y_t | t | y_t |
|-----|-------|-----|-------|
| 1 | 5,5 | 9 | 8,3 |
| 2 | 4,8 | 10 | 5,4 |
| 3 | 5,1 | 11 | 6,4 |
| 4 | 9,0 | 12 | 10,9 |
| 5 | 7,1 | 13 | 9,0 |
| 6 | 4,9 | 14 | 6,6 |
| 7 | 6,1 | 15 | 7,5 |
| 8 | 10,0 | 16 | 11,2 |

Варианты 9, 10

| t | y_t | t | y_t |
|-----|-------|-----|-------|
| 1 | 5,6 | 9 | 8,2 |
| 2 | 4,7 | 10 | 5,6 |
| 3 | 5,2 | 11 | 6,4 |
| 4 | 9,1 | 12 | 10,8 |
| 5 | 7,0 | 13 | 9,1 |
| 6 | 5,1 | 14 | 6,7 |
| 7 | 6,0 | 15 | 7,5 |
| 8 | 10,2 | 16 | 11,3 |

4. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пример. Изучается модель вида

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C_t – расходы на потребление в период t , Y_t – совокупный доход в период t , I_t – инвестиции в период t , r_t – процентная ставка в период t , M_t – денежная масса в период t , G_t – государственные расходы в период t , C_{t-1} – расходы на потребление в период $t-1$, I_{t-1} – инвестиции в период $t-1$. Первое уравнение – функция потребления, второе уравнение – функция инвестиций, третье уравнение – функция денежного рынка, четвертое уравнение – тождество дохода.

Модель представляет собой систему одновременных уравнений. Проверим каждое ее уравнение на идентификацию.

Модель включает четыре эндогенные переменные (C_t, I_t, Y_t, r_t) и четыре predetermined переменные (две экзогенные переменные – M_t и G_t и две лаговые переменные – C_{t-1} и I_{t-1}).

Проверим необходимое условие идентификации для каждого из уравнений модели.

Первое уравнение: $C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1$. Это уравнение содержит две эндогенные переменные C_t и Y_t и одну predetermined переменную C_{t-1} . Таким образом, $H = 2$, а $D = 4 - 1 = 3$, т.е. выполняется условие $D + 1 > H$. Уравнение сверхидентифицируемо.

Второе уравнение: $I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + \varepsilon_2$. Оно включает две эндогенные переменные I_t и r_t и одну экзогенную переменную I_{t-1} . Выполняется условие $D + 1 = 3 + 1 > H = 2$. Уравнение сверхидентифицируемо.

Третье уравнение: $r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + \varepsilon_3$. Оно включает две эндогенные переменные Y_t и r_t и одну экзогенную переменную M_t . Выполняется условие $D + 1 = 3 + 1 > H = 2$. Уравнение сверхидентифицируемо.

Четвертое уравнение: $Y_t = C_t + I_t + G_t$. Оно представляет собой тождество, параметры которого известны. Необходимости в идентификации нет.

Проверим для каждого уравнения достаточное условие идентификации. Для этого составим матрицу коэффициентов при переменных модели.

| | C_t | I_t | r_t | Y_t | C_{t-1} | I_{t-1} | M_t | G_t |
|---------------|-------|-------|----------|----------|-----------|-----------|----------|-------|
| I уравнение | -1 | 0 | 0 | b_{11} | b_{12} | 0 | 0 | 0 |
| II уравнение | 0 | -1 | b_{21} | 0 | 0 | b_{22} | 0 | 0 |
| III уравнение | 0 | 0 | -1 | b_{31} | 0 | 0 | b_{32} | 0 |
| Тождество | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

В соответствии с достаточным условием идентификации ранг матрицы коэффициентов при переменных, не входящих в исследуемое уравнение, должен быть равен числу эндогенных переменных модели без одного.

Первое уравнение. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид

| | I_t | r_t | I_{t-1} | M_t | G_t |
|---------------|-------|----------|-----------|----------|-------|
| II уравнение | -1 | b_{21} | b_{22} | 0 | 0 |
| III уравнение | 0 | -1 | 0 | b_{32} | 0 |
| Тождество | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Ранг данной матрицы равен трем, так как определитель квадратной подматрицы 3×3 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{22}b_{32} \neq 0.$$

Достаточное условие идентификации для данного уравнения выполняется.

Второе уравнение. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид

| | C_t | Y_t | C_{t-1} | M_t | G_t |
|---------------|-------|----------|-----------|----------|-------|
| I уравнение | -1 | b_{11} | b_{12} | 0 | 0 |
| III уравнение | 0 | b_{31} | 0 | b_{32} | 0 |
| Тождество | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 |

Ранг данной матрицы равен трем, так как определитель квадратной подматрицы 3×3 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{12}b_{32} \neq 0.$$

Достаточное условие идентификации для данного уравнения выполняется.

Третье уравнение. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид

| | C_t | I_t | C_{t-1} | I_{t-1} | G_t |
|--------------|-------|-------|-----------|-----------|-------|
| I уравнение | -1 | 0 | b_{12} | 0 | 0 |
| II уравнение | 0 | -1 | 0 | b_{22} | 0 |
| Тождество | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Ранг данной матрицы равен трем, так как определитель квадратной подматрицы 3×3 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{12}b_{22} \neq 0.$$

Достаточное условие идентификации для данного уравнения выполняется.

Таким образом, все уравнения модели сверхидентифицируемы. Приведенная форма модели в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} C_t = A_1 + \delta_{11}C_{t-1} + \delta_{12}I_{t-1} + \delta_{13}M_t + \delta_{14}G_t + u_1, \\ I_t = A_2 + \delta_{21}C_{t-1} + \delta_{22}I_{t-1} + \delta_{23}M_t + \delta_{24}G_t + u_2, \\ r_t = A_3 + \delta_{31}C_{t-1} + \delta_{32}I_{t-1} + \delta_{33}M_t + \delta_{34}G_t + u_3, \\ Y_t = A_4 + \delta_{41}C_{t-1} + \delta_{42}I_{t-1} + \delta_{43}M_t + \delta_{44}G_t + u_1. \end{cases}$$

4.1 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Даны системы эконометрических уравнений.

Требуется

1. Применив необходимое и достаточное условие идентификации, определите, идентифицируемо ли каждое из уравнений модели.
2. Определите метод оценки параметров модели.
3. Запишите в общем виде приведенную форму модели.

Вариант 1

Модель протекционизма Сальватора (упрощенная версия):

$$\begin{cases} M_t = a_1 + b_{12}N_t + b_{13}S_t + b_{14}E_{t-1} + b_{15}M_{t-1} + \varepsilon_1, \\ N_t = a_2 + b_{21}M_t + b_{23}S_t + b_{26}Y_t + \varepsilon_2, \\ S_t = a_3 + b_{31}M_t + b_{32}N_t + b_{36}X_t + \varepsilon_3. \end{cases}$$

где M – доля импорта в ВВП; N – общее число прошений об освобождении от таможенных пошлин; S – число удовлетворенных прошений об освобождении от таможенных пошлин; E – фиктивная переменная, равная 1 для тех лет, в которые курс доллара на международных валютных рынках был искусственно завышен, и 0 – для всех остальных лет; Y – реальный ВВП; X – реальный объем чистого экспорта; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 2

Макроэкономическая модель (упрощенная версия модели Клейна):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{13}T_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{24}K_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t, \end{cases}$$

где C – потребление; I – инвестиции; Y – доход; T – налоги; K – запас капитала; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 3

Макроэкономическая модель экономики США (одна из версий):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{23}r_t + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{34}M_t + b_{35}r_{t-1} + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – ВВП; I – инвестиции; r – процентная ставка; M – денежная масса; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 4

Модель Кейнса (одна из версий):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – ВВП; I – валовые инвестиции; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 5

Модель денежного и товарного рынков:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{14}M_t + \varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{23}I_t + b_{25}G_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{31}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – реальный ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции; G – реальные государственные расходы.

Вариант 6

Модифицированная модель Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – доход; I – инвестиции; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 7

Макроэкономическая модель:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}D_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{22}Y_t + b_{23}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = D_t + T_t, \\ D_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – расходы на потребление; Y – чистый национальный продукт; D – чистый национальный доход; I – инвестиции; T – косвенные налоги; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 8

Гипотетическая модель экономики:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}J_t + \varepsilon_1, \\ J_t = a_2 + b_{21}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ T_t = a_3 + b_{31}Y_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + J_t + G_t, \end{cases}$$

где C – совокупное потребление в период t ; Y – совокупный доход в период t ; J – инвестиции в период t ; T – налоги в период t ; G – государственные доходы в период t .

Вариант 9

Модель денежного рынка:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{11}M_t + b_{12}Y_t + \varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{22}I_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{33}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции.

Вариант 10

Конъюнктурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}r_t + b_{22}I_{t-1} + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{32}M_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – расходы на потребление; Y – ВВП; I – инвестиции; r – процентная ставка; M – денежная масса; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

II. МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

1. Таблица значений F - критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$

| $k_2 \backslash k_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 161,5 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 233,9 | 238,9 | 243,9 | 249,0 | 254,3 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,37 | 19,41 | 19,45 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,84 | 8,74 | 8,64 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,04 | 5,91 | 5,77 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,82 | 4,68 | 4,53 | 4,36 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,15 | 4,00 | 3,84 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,73 | 3,57 | 3,41 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,44 | 3,28 | 3,12 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,23 | 3,07 | 2,90 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,07 | 2,91 | 2,74 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 2,95 | 2,79 | 2,61 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,85 | 2,69 | 2,50 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 | 2,77 | 2,60 | 2,42 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,70 | 2,53 | 2,35 | 2,13 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,64 | 2,48 | 2,29 | 2,07 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,59 | 2,42 | 2,24 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,55 | 2,38 | 2,19 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,51 | 2,34 | 2,15 | 1,92 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,48 | 2,31 | 2,11 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,45 | 2,28 | 2,08 | 1,84 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,42 | 2,25 | 2,05 | 1,81 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,40 | 2,23 | 2,03 | 1,78 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,38 | 2,20 | 2,00 | 1,76 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,36 | 2,18 | 1,98 | 1,73 |
| 25 | 4,24 | 3,38 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,34 | 2,16 | 1,96 | 1,71 |
| 26 | 4,22 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,32 | 2,15 | 1,95 | 1,69 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,30 | 2,13 | 1,93 | 1,67 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,44 | 2,29 | 2,12 | 1,91 | 1,65 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,54 | 2,43 | 2,28 | 2,10 | 1,90 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,27 | 2,09 | 1,89 | 1,62 |
| 35 | 4,12 | 3,26 | 2,87 | 2,64 | 2,48 | 2,37 | 2,22 | 2,04 | 1,83 | 1,57 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,18 | 2,00 | 1,79 | 1,51 |
| 45 | 4,06 | 3,21 | 2,81 | 2,58 | 2,42 | 2,31 | 2,15 | 1,97 | 1,76 | 1,48 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 50 | 4,03 | 3,18 | 2,79 | 2,56 | 2,40 | 2,29 | 2,13 | 1,95 | 1,74 | 1,44 |

| | | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,52 | 2,37 | 2,25 | 2,10 | 1,92 | 1,70 | 1,39 |
| 70 | 3,98 | 3,13 | 2,74 | 2,50 | 2,35 | 2,23 | 2,07 | 1,89 | 1,67 | 1,35 |
| 80 | 3,96 | 3,11 | 2,72 | 2,49 | 2,33 | 2,21 | 2,06 | 1,88 | 1,65 | 1,31 |
| 90 | 3,95 | 3,10 | 2,71 | 2,47 | 2,32 | 2,20 | 2,04 | 1,86 | 1,64 | 1,28 |
| 100 | 3,94 | 3,09 | 2,70 | 2,46 | 2,30 | 2,19 | 2,03 | 1,85 | 1,63 | 1,26 |
| 125 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,44 | 2,29 | 2,17 | 2,01 | 1,83 | 1,60 | 1,21 |
| 150 | 3,90 | 3,06 | 2,66 | 2,43 | 2,27 | 2,16 | 2,00 | 1,82 | 1,59 | 1,18 |
| 200 | 3,89 | 3,04 | 2,65 | 2,42 | 2,26 | 2,14 | 1,98 | 1,80 | 1,57 | 1,14 |
| 300 | 3,87 | 3,03 | 2,64 | 2,41 | 2,25 | 2,13 | 1,97 | 1,79 | 1,55 | 1,10 |
| 400 | 3,86 | 3,02 | 2,63 | 2,40 | 2,24 | 2,12 | 1,96 | 1,78 | 1,54 | 1,07 |
| 500 | 3,86 | 3,01 | 2,62 | 2,39 | 2,23 | 2,11 | 1,96 | 1,77 | 1,54 | 1,06 |
| 1000 | 3,85 | 3,00 | 2,61 | 2,38 | 2,22 | 2,10 | 1,95 | 1,76 | 1,53 | 1,03 |
| ∞ | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 | 1,94 | 1,75 | 1,52 | 1 |

2. Критические значения t -критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10, 0,05, 0,01 (двухсторонний)

| Число степеней свободы d.f. | α | | | Число степеней свободы d.f. | α | | |
|-----------------------------|----------|--------|--------|-----------------------------|----------|--------|--------|
| | 00,10 | 0,05 | 0,01 | | 00,10 | 0,05 | 0,01 |
| 1 | 6,3138 | 12,706 | 63,657 | 18 | 1,7341 | 2,1009 | 2,8784 |
| 2 | 2,9200 | 4,3027 | 9,9248 | 19 | 1,7291 | 2,0930 | 2,8609 |
| 3 | 2,3534 | 3,1825 | 5,8409 | 20 | 1,7247 | 2,0860 | 2,8453 |
| 4 | 2,1318 | 2,7764 | 4,5041 | 21 | 1,7207 | 2,0796 | 2,8314 |
| 5 | 2,0150 | 2,5706 | 4,0321 | 22 | 1,7171 | 2,0739 | 2,8188 |
| 6 | 1,9432 | 2,4469 | 3,7074 | 23 | 1,7139 | 2,0687 | 2,8073 |
| 7 | 1,8946 | 2,3646 | 3,4995 | 24 | 1,7109 | 2,0639 | 2,7969 |
| 8 | 1,8595 | 2,3060 | 3,3554 | 25 | 1,7081 | 2,0595 | 2,7874 |
| 9 | 1,8331 | 2,2622 | 3,2498 | 26 | 1,7056 | 2,0555 | 2,7787 |
| 10 | 1,8125 | 2,2281 | 3,1693 | 27 | 1,7033 | 2,0518 | 2,7707 |
| 11 | 1,7959 | 2,2010 | 3,1058 | 28 | 1,7011 | 2,0484 | 2,7633 |
| 12 | 1,7823 | 2,1788 | 3,0545 | 29 | 1,6991 | 2,0452 | 2,7564 |
| 13 | 1,7709 | 2,1604 | 3,0123 | 30 | 1,6973 | 2,0423 | 2,7500 |
| 14 | 1,7613 | 2,1448 | 2,9768 | 40 | 1,6839 | 2,0211 | 2,7045 |
| 15 | 1,7530 | 2,1315 | 2,9467 | 60 | 1,6707 | 2,0003 | 2,6603 |
| 16 | 1,7459 | 2,1199 | 2,9208 | 120 | 1,6577 | 1,9799 | 2,6174 |
| 17 | 1,7396 | 2,1098 | 2,8982 | ∞ | 1,6449 | 1,9600 | 2,5758 |

3. Значения статистик Дарбина-Уотсона $d_L d_U$ при 5%-ном уровне значимости

| n | $k = 1$ | | $k = 2$ | | $k = 3$ | | $k = 4$ | | $k = 5$ | |
|-----|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|
| | d_L | d_U | d_L | d_U | d_L | d_U | d_L | d_U | d_L | d_U |
| 6 | 0,61 | 1,40 | | | | | | | | |
| 7 | 0,70 | 1,36 | 0,47 | 1,90 | | | | | | |
| 8 | 0,76 | 1,33 | 0,56 | 1,78 | 0,37 | 2,29 | | | | |
| 9 | 0,82 | 1,32 | 0,63 | 1,70 | 0,46 | 2,13 | | | | |
| 10 | 0,88 | 1,32 | 0,70 | 1,64 | 0,53 | 2,02 | | | | |
| 11 | 0,93 | 1,32 | 0,66 | 1,60 | 0,60 | 1,93 | | | | |
| 12 | 0,97 | 1,33 | 0,81 | 1,58 | 0,66 | 1,86 | | | | |
| 13 | 1,01 | 1,34 | 0,86 | 1,56 | 0,72 | 1,82 | | | | |
| 14 | 1,05 | 1,35 | 0,91 | 1,55 | 0,77 | 1,78 | | | | |
| 15 | 1,08 | 1,36 | 0,95 | 1,54 | 0,82 | 1,75 | 0,69 | 1,97 | 0,56 | 2,21 |
| 16 | 1,10 | 1,37 | 0,98 | 1,54 | 0,86 | 1,73 | 0,74 | 1,93 | 0,62 | 2,15 |
| 17 | 1,13 | 1,38 | 1,02 | 1,54 | 0,90 | 1,71 | 0,78 | 1,90 | 0,67 | 2,10 |
| 18 | 1,16 | 1,39 | 1,05 | 1,53 | 0,93 | 1,69 | 0,82 | 1,87 | 0,71 | 2,06 |
| 19 | 1,18 | 1,40 | 1,08 | 1,53 | 0,97 | 1,68 | 0,85 | 1,85 | 0,75 | 2,02 |
| 20 | 1,20 | 1,41 | 1,10 | 1,54 | 1,00 | 1,68 | 0,90 | 1,83 | 0,79 | 1,99 |
| 21 | 1,22 | 1,42 | 1,13 | 1,54 | 1,03 | 1,67 | 0,93 | 1,81 | 0,83 | 1,96 |
| 22 | 1,24 | 1,43 | 1,15 | 1,54 | 1,05 | 1,66 | 0,96 | 1,80 | 0,86 | 1,94 |
| 23 | 1,26 | 1,44 | 1,17 | 1,54 | 1,08 | 1,66 | 0,99 | 1,79 | 0,90 | 1,92 |
| 24 | 1,27 | 1,45 | 1,19 | 1,55 | 1,10 | 1,66 | 1,01 | 1,78 | 0,93 | 1,99 |
| 25 | 1,29 | 1,45 | 1,21 | 1,55 | 1,12 | 1,66 | 1,04 | 1,77 | 0,95 | 1,89 |
| 26 | 1,30 | 1,46 | 1,22 | 1,55 | 1,14 | 1,65 | 1,06 | 1,76 | 0,98 | 1,88 |
| 27 | 1,32 | 1,47 | 1,24 | 1,56 | 1,16 | 1,65 | 1,08 | 1,76 | 1,01 | 1,86 |
| 28 | 1,33 | 1,48 | 1,26 | 1,56 | 1,18 | 1,65 | 1,10 | 1,75 | 1,03 | 1,85 |
| 29 | 1,34 | 1,48 | 1,27 | 1,56 | 1,20 | 1,65 | 1,12 | 1,74 | 1,05 | 1,84 |
| 30 | 1,35 | 1,49 | 1,28 | 1,57 | 1,21 | 1,65 | 1,14 | 1,74 | 1,07 | 1,83 |

III. ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ЗАЧЕТА (ЭКЗАМЕНА)

1. Эконометрика как наука. Предмет цель и задачи эконометрики.
2. Эконометрическая модель – основа механизма эконометрического моделирования. Классы моделей.
3. Эконометрические переменные и эконометрические модели. Типы данных и виды переменных в эконометрических исследованиях.
4. Задачи, решаемые с помощью эконометрических моделей.
5. Основные этапы эконометрического моделирования.
6. Основные проблемы эконометрического моделирования.
7. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
8. Спецификация модели.
9. Двумерная (однофакторная) регрессионная модель.
10. Метод наименьших квадратов.
11. Линейная регрессия. Оценка параметров парной линейной регрессии и их экономическая интерпретация.
12. Расчет и интерпретация коэффициента корреляции для парной линейной регрессии.
13. Показатели качества регрессии. Понятие о коэффициенте эластичности и его характеристика.
14. Прогноз по уравнению регрессии. Средняя ошибка аппроксимации.
15. Коэффициент детерминации и его характеристика.
16. Проверка гипотезы о значимости уравнения регрессии в целом.
17. t-критерий Стьюдента в оценке значимости коэффициента корреляции.
18. Нелинейная регрессия по включаемым в нее объясняющим переменным, но линейная по оцениваемым параметрам.
19. Нелинейная регрессия по оцениваемым параметрам.
20. Расчет индекса корреляции для парной нелинейной регрессии.
21. Множественная регрессия. Отбор факторных признаков при построении множественной регрессии.
22. Оценка параметров множественной регрессии.
23. Множественная и частная корреляция. Частный коэффициент корреляции.
24. Понятие мультиколлинеарности и способы ее устранения.
25. Временные ряды. Основные понятия и сведения. Задачи и этапы анализа временных рядов. График.
26. Стационарные временные ряды и их характеристики. Выборочная частная автокорреляционная функция. Формулы вычисления.
27. Аналитическое выравнивание временного ряда. Прогнозирование на основе моделей временных рядов, на различных примерах.
28. Общее понятие о системе одновременных уравнений и ее составление.
29. Виды систем эконометрических уравнений.
30. Структурная и приведенная форма модели.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. - М.: ЮНИТИ, 2003.
2. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. - М.: Дело, 2004.
3. Домбровский В.В. Эконометрика. - М.: Дело, 2004.
4. Доугерти Кр. Введение в эконометрику. - М.: ИНФРА-М, 1997.
5. Елисеева И.И. Эконометрика. - М.: Финансы и статистика, 2002.
6. Практикум по эконометрике. /Под ред. И.И. Елисеевой, - М.: Финансы и статистика, 2002.
7. Лугинин О.Е., Фомишина В.Н. Экономико-математические методы и модели: Теория и практика с решением задач. – Ростов н/Д: Феникс, 2009.

Дополнительная

8. Дорохина Е.Ю., Преснякова Л.Ф., Тихомиров Н.П. Сборник задач по эконометрике: Учебное пособие для студентов экономических вузов. М.: «Экзамен», 2003.
9. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ЮНИТИ, 2004.
10. Новиков А.И. Эконометрика. - М.: ИТК «Дашков и К^о», 2012.

ДЛЯ ЗАМЕТОК