ЛЕКЦИЯ №3

Тема: Отделение кратных множителей. Корни многочлена

Теорема 14. *Если неприводимый над полем P многочлен p(x) входит в многочлен f(x) из* $P[x]$ *с кратностью* $\propto$*, то p(x) в производную* $f'(x)$ *войдет с кратностью* $\propto -1$.

$\square$. Действительно, пусть

$$f(x)=p^{\propto}(x)\cdot q(x)$$

и f(x) не делится на $p^{\propto+1}(x)\cdot$ Значит, в $q(x)$ $p(x)$ не входит. Возьмем производную:

$$f'(x)=\propto p^{\propto-1}(x)\cdot p'(x)\cdot q(x)+p^{\propto}(x)\cdot q'(x)$$

Так как в $q(x)$ не входит $p(x)$, то

$$f'(x)=p^{\propto-1}(x)\cdot(\propto\cdot p'(x)\cdot q(x)+p(x)\cdot q'(x)),$$

и скобка на $p(x)$ не делится. $\blacksquare$

Теорема 15. *Многочлен f(x) из* $P[x]$ *над полем P тогда и только тогда не имеет кратных множителей, когда он взаимно прост со своей производной.*

$\square$. *Рассмотрим каноническое разложение (7) многочлена f(x):*

$$f(x)=c\cdot p_1^{\alpha_1}(x)\cdot p_2^{\alpha_2}(x)\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}(x).$$

Тогда, по теореме 14, $f'(x)=c\propto_1\ldots\propto_s p_1^{\propto_1-1}\ldots p_s^{\propto_s-1}q(x)$, здесь с$\neq 0$.

Вычислим

$$D(x)=\text{НОД}(f(x),f'(x))=c_1p_1^{\propto_1-1}\ldots p_s^{\propto_s-1}, \qquad (8)$$

где $c_1=c\propto_1\ldots\propto_s$.

Значит, $D(x)$ только тогда нулевой степени, когда $\propto_1-1=0,\ldots,\propto_s-1=0$, т. е. $\propto_1=1,\ldots,\propto_s=1$. $\blacksquare$

Алгоритм отделения кратных множителей

Обозначим через X_1 произведение всех простых неприводимых множителей канонического разложения (7); через X_2 - произведение всех двукратных неприводимых множителей канонического разложения , взятых по одному разу; через X_3 - произведение всех трехкратных неприводимых множителей канонического разложения, взятых по одному разу, и т. д. Если нет простых делителей, то возьмем $X_1 = 1$. Аналогично, если нет делителей кратности k, то положим $X_k = 1$.

Тогда

$$f(x) = cX_1 \cdot X_2^2 \cdot \ldots \cdot X_m^m, \tag{9}$$

где m – наивысшая кратность делителей многочлена *f(x)*.

По разложению (8) имеем:

$$D(x) = c_1 X_2 X_3^2 \ldots X_m^{m-1}.$$

$$D_1(x) = \text{НОД}\left(D(x), D'(x)\right) = c_2 X_3 X_4^2 \ldots X_m^{m-2}.$$

$$D_2(x) = \text{НОД}\left(D_1(x), D_1'(x)\right) = c_3 X_4 X_5^2 \ldots X_m^{m-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_{m-1}(x) = \text{НОД}\left(D_{m-2}(x), D_{m-2}'(x)\right) = 1$$

Теперь составим следующие дроби:

$$E_1 = \frac{f(x)}{D(x)} = \frac{c}{c_1} X_1 X_2 \ldots X_m = d_1 X_1 X_2 \ldots X_m$$

$$E_2 = \frac{D(x)}{D_1(x)} = \frac{c_1}{c_2} X_2 X_3 \ldots X_m = d_2 X_2 X_3 \ldots X_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E_m = \frac{D_{m-2}(x)}{D_{m-1}(x)} = c_{m-1} X_m = d_m X_m$$

Тогда

$$\frac{E_1}{E_2} = e_1 X_1, \quad e_1 = \frac{d_1}{d_2}$$

$$\frac{E_2}{E_3} = e_2 X_2, \quad e_2 = \frac{d_2}{d_3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E_m = e_m X_m, \quad e_m = d_m$$

Легко видеть, что

$$f(x) = (e_1 X_1) \cdot (e_2 X_2)^2 \cdot \ldots \cdot (e_m X_m)^m \tag{10}$$

Пример. Выделить кратные множители многочлена

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}$$

над полем рациональных чисел.

Решение. Алгоритм решения полностью повторяет алгоритм отделения кратных корней:

1) Вычисляем производную

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}$$

2) С помощью алгоритма Евклида находим наибольший общий делитель $D(x) = \text{НОД}(f,\ f') = ?$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16} & 4x^3 - \frac{1}{2} \\ x^4 - \frac{1}{8}x & \hline \\ \hline & \frac{1}{4}x \\ -\frac{3}{8}x + \frac{3}{16} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 - \frac{1}{2} & -\frac{3}{8}x + \frac{3}{16} \\ 4x^3 - 2x^2 & \hline \\ \hline & -\frac{32}{3}x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{8}{3} \\ 2x^2 - \frac{1}{2} & \\ 2x^2 - x & \\ \hline x - \frac{1}{2} & \\ x - \frac{1}{2} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16} = (4x^3 - \frac{1}{2})\frac{1}{4}x + -\frac{3}{8}x + \frac{3}{16} = (-\frac{3}{8}x + \frac{3}{16})(-\frac{32}{3}x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{8}{3})\frac{1}{4}x + -\frac{3}{8}x + \frac{3}{16} = \left(-\frac{3}{8}x + \frac{3}{16}\right)\left(\left(-\frac{32}{3}x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{8}{3}\right)\frac{1}{4}x + 1\right) = \left(2x - 1\right)\left(-\frac{3}{16}\right)\left(\left(-\frac{32}{3}x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{8}{3}\right)\frac{1}{4}x + 1\right) = (2x - 1)\left((2x^2 + x + \frac{1}{2})\frac{1}{4}x + 1\right)$

$$\boxed{D(x) = 2x - 1}$$

3) Находим $D'(x) = 2$

$D_1(x) = \text{НОД}(D, D') = 1$

4) Осталось найти $E_1,\ \ E_2$

$$E_1 = \frac{f(x)}{D(x)} = \frac{x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}}{2x - 1}$$

$$\begin{array}{c|l}
x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16} & \quad 2x - 1 \\
x^4 - \frac{1}{2}x^3 & \overline{\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}} \\
\hline
\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16} & \\
\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 & \\
\hline
\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16} & \\
\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x & \\
\hline
-\frac{3}{8}x + \frac{3}{16} & \\
-\frac{3}{8}x + \frac{3}{16} & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$E_1 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}(8x^3 + 4x^2 + 2x - 3)$$

$$E_2 = \frac{D(x)}{D_1(x)} = 2x - 1$$

5) Делим $\frac{E_1}{E_2} = \frac{8x^3+4x^2+2x-3}{2x-1} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \cdot (4x^2 + 4x + 3)$

$$\begin{array}{c|l}
8x^3 + 4x^2 + 2x - 3 & \quad 2x - 1 \\
2x^3 - 4x^2 & \overline{4x^2 + 4x + 3} \\
\hline
8x^2 + 2x - 3 & \\
8x^2 - 4x & \\
\hline
6x - 3 & \\
6x - 3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$X_1 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}$$

$$X_2 = 2x - 1$$

6) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}\right)(2x-1)^2$

Ответ: $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}\right)(2x-1)^2$

Примечание. *Процесс отделения корней использует дифференцирование, алгоритм Евклида, деление многочленов. Следовательно, если коэффициенты многочлена $f(x)$принадлежат полю P, то этому же полю принадлежат и коэффициенты D_i, E_i, X_i. Значит, множители X_i получаются одни и те же над полем P и над его расширением. Аналогично, если над полем P у многочлена имеются только простые делители, то и над расширением также будут только простые делители.*

Определение 13. *Корнем многочлена f(x) называется такое число a из поля P, что значение многочлена при x=a равно нулю.*

Легко убедиться, что имеет место теорема:

Теорема 16. *Число a ϵP тогда и только тогда является корнем f(x), когда f(x)делится на x-a.*

$\square$. Если $f(x)$ делится на $(x$-$a)$, то $f(x) = (x$-$a) \cdot q(x)$. Тогда $f(a) = 0$.

Обратно, разделим $f(x)$ на x - a с остатком: $f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$.

Подставим $x = a$: *f(a)= r(a). В нашем случае r(a)=0.* Но степень $r(x)$ равна нулю.

Значит, $r(x)$= const =0. Тогда $f(x) = (x - a) \cdot q(x)$. $\boxed{\blacksquare}$

Заодно мы доказали теорему:

Теорема 17 (теорема Безу). *Остаток от деления многочлена f(x) на (x-a) равен значению f(x) при x=a.*

Как следствие теорем 16 и 17 получим теорему:

Теорема 18. *Если коэффициенты многочлена целые числа, то целое число a является корнем многочлена тогда и только тогда, когда оно является делителем свободного члена многочлена f(x).*

$\square$. Пусть a – корень многочлена. Тогда многочлен делится на *(x-a):*

$f(x) = (x - a) \cdot q(x) = (x - a)(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) = b_m x^{m+1} + \cdots + b_1 x^2 + b_0 x - ab_m x^m - \cdots - ab_1 x - ab_0$, т. е. a – делитель свободного члена.

Обратно пусть a – делитель свободного члена. Тогда

$f(x) = b_m x^{m+1} + \cdots + b_1 x^2 + b_0 x - ab_m x^m - \cdots - ab_1 x - ab_0$ $(x - a)$ $(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)$= =$(x - a) \cdot q(x)$. Следовательно, $f(a) = 0$. ■

Теорема 19. *Число корней многочлена f(x) не превосходит степени многочлена, если даже считать каждый корень столько раз, какова его кратность.*

□. $f(x) = (x - a_1)^{\propto_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_k)^{\propto_k} q(x)$ – отделили корни. Тогда степень n ($n \gg 1$) многочлена $f(x)$ выше или равна $\propto_1 + \cdots + \propto_k$, так как n = deg(f)= $\propto_1 + \cdots + \propto_k + \deg(q) \gg \propto_1 + \cdots + \propto_k$.

Пусть теперь deg(f)=0. Тогда у многочлена f нет корней. ■

Как следствие получим теорему:

Теорема 20. *Если степени многочленов f(x) и g(x) из $P[x]$ не превосходят n , и многочлены f(x) и g(x) имеют равные значения более чем при n различных значениях x, то f(x) = g(x) .*

□. От противного. Допустим, $f(x) \neq g(x)$. Тогда $f(x) - g(x) = h(x) \neq 0$.

Степень многочлена $h(x)$ не превосходит n . Но, с другой стороны, $h(x)$ обращается в ноль более чем при n значениях x, т. е. более чем n корней. Но тогда степень многочлена $h(x)$ превосходит n , - получили противоречие. Следовательно, допущение $h(x) \neq 0$ неверное, т. е. $h(x) = 0$, т.е. $f(x) - g(x) = 0$. Значит, $f(x) = g(x)$. ■

Как следствие теоремы 20 получим следующую теорему:

Теорема 21. *Два многочлена f(x) и g(x) из $P[x]$, имеющие равные значения при всех x, равны между собой (как многочлены).*

Напоследок: Схема Горнера деления многочлена на x-a

Пусть $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x).$$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0$$

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + a_1 x + a_0 =$

$b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1}) x^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2}) x^{n-2} + \ldots + (b_2 - ab_1)x + (r - ab_0)$.

Из условия совпадения многочленов:

$a_n = b_{n-1}$

$a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$

…………………………

$a_1 = b_2 - ab_1$

$a_0 = r - ab_0$

$b_{n-1} = a_n$

$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$

$b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$

……………………..

$b_0 = a_1 + ab_1$

$r = a_0 + ab_0$

Для удобства составляем таблицу:

Таблица для вычисления коэффициентов по схеме Горнера

Наименование коэффициентов многочлена	a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
Значения коэффициентов a					…		
Формула для вычисления коэффициентов b		a_n	$a_{n-1} + ab_{n-1}$	$a_{n-2} + ab_{n-2}$	…	$a_1 + ab_1$	$a_0 + ab_0$
Значения b					…		
		b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…	b_0	r

Образец решения

Задача. Разделить по схеме Горнера многочлен $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 11$ на многочлен $x+\frac{1}{2}$.

Решение. Составим таблицу и заполним ее:

Наименование коэффициентов многочлена	a	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
Значения	$-\frac{1}{2}$	1	0	-2	3	-5	11

коэффициентов А							
Формула для вычисления коэффициентов b		a_5	$a_4 + ab_4$	$a_3 + ab_3$	$a_2 + ab_{12}$	$a_1 + ab_1$	$a_0 + ab_0$
Значения b		1	$-\frac{1}{2}$	- $\frac{7}{4}$	$\frac{31}{8}$	- $\frac{111}{16}$	$\frac{463}{32}$
		b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	r

$$x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 11 = (x + \frac{1}{2}) \cdot (x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{31}{8}x - \frac{111}{16}) + \frac{463}{32}$$

Ответ: $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 11 = (x + \frac{1}{2}) \cdot (x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{31}{8}x - \frac{111}{16}) + \frac{463}{32}$