ЛЕКЦИЯ №4

Тема: Многочлены над полем комплексных чисел. Многочлены над полем действительных чисел

В нашей лекции мы рассмотрим доказательство основной теоремы алгебры.

Основная теорема алгебры. *Всякий многочлен f(x) над полем комплексных чисел n –й степени, $n \gg 1$, имеет по меньшей мере один комплексный корень.*

История вопроса . Еще в 1649 г. французский ученый Жерар предположил, что любое алгебраическое уравнение n –й степени имеет n корней, действительных и мнимых. В 1746 г. Французский математик Даламбер впервые попытался доказать основную теорему алгебры, но получилось нестрого. В 1799 г. Гауссу удалось получить более строгое доказательство. Потом Гаусс нашел еще несколько доказательств это теоремы. Теорема не является чисто алгебраической, так как использует понятие непрерывности, т. е. анализ.

Заметим, что степень комплексного числа является непрерывной функцией комплексного переменного во всей комплексной области, на всей комплексной плоскости. Тогда легко доказать, что многочлен *f(x)* над полем комплексных чисел любой степени является непрерывной функцией.

Лемма 1 (о многочлене без свободного члена). *Для всякого многочлена f(x), f(x)=$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1$ степени n, $n \gg 1$, со свободным членом a_0, равным нулю, можно для любого $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| < \delta$, будет иметь место $|f(x)| < \varepsilon$ (Это значит, что для всех сколь угодно малых по модулю x модуль f(x) можно сделать сколь угодно малым.*

⊡ *Если взять в качестве x число 0, то пользуясь непрерывностью многочлена f(x), можем для любого наперед заданного малого ε указать такое малое $\delta > 0$, что из $|x - 0| < \delta$ следует $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$, т. е. $|f(x) - 0| < \varepsilon$, т.е. $|f(x)| < \varepsilon$.*

■

Теорема 1. (о модуле старшего члена). *Пусть f(x)=*$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1 + a_0$ *- многочлен степени* n*,* $n \gg 1$*, и A – наибольшая из величин модулей* $|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|$*. Тогда для любого наперед заданного положительного числа K будет выполняться неравенство:*

$$|a_nx^n| > K|a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1 + a_0| \qquad (1)$$

при всех x, удовлетворяющих

$$|x| > \frac{KA}{|a_0|} + 1. \qquad (2)$$

⊡

$|a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1 + a_0| \ll |a_{n-1}||x^{n-1}| + \cdots . +|a_1||x| + |a_0| \ll$

$\ll A(|x^{n-1}| + \cdots . +|x| + 1) \ll A\frac{|x|^n-1}{|x|-1} \ll A\frac{|x|^n}{|x|-1}$ *при* $|x| > 1$.

$K|a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1 + a_0| \ll K\,A\dfrac{|x|^n}{|x|-1}$

Выясним, когда

$$K\,A\frac{|x|^n}{|x|-1} < |a_n||x^n| = |a_nx^n|,$$

решив это неравенств*о:* $|x| > \frac{KA}{|a_0|} + 1$.Как раз получили, что$|x| > 1$

■

Лемма 2 (о возрастании модуля многочлена). *Модуль всякого многочлена f(x) степени* n*,* $n \gg 1$*, при достаточно больших значениях* $|x|$*будет больше любого наперед заданного большого положительного действительного числа M.*

⊡

Так как модуль суммы больше или равен разности модулей, то

$$|f(x)| \gg |a_nx^n| - |a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1 + a_0|$$

Применим теорему 1, полагая, что K=2 и $|x| > \frac{2A}{|a_0|} + 1$.

Получим:

$$|a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1 + a_0| < \frac{1}{2}|a_nx^n|.$$

$$|x| > \frac{2A}{|a_0|} + 1 - |a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1 + a_0| \gg |a_nx^n| - \frac{1}{2}|a_nx^n| = \frac{1}{2}|a_nx^n|.$$

Если теперь взять x сколь угодно большим так, что $|x| > \frac{2A}{|a_0|} + 1$ *и* $|x| > \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_n|}}$,

то $|f(x)| \gg \frac{1}{2}|a_n x^n| > M$.

■

Лемма Даламбера. *Если многочлен f(x)=*$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0,\ a_0 \neq 0$ *степени* $n, n \gg 1,$ *не обращается в нуль при x=*x_0*, то можно подобрать всегда такое комплексное число* $h \neq 0$*, чтобы* $|f(x_0 + h| < |f(x_0)|$ *(при этом* h *может быть даже сколь угодно малым по модулю).*

Без доказательства.

Теорема 2. *Действительная функция* $\varphi(x)$ *комплексного переменного x, непрерывная в некотором замкнутом круге C, достигает в этом замкнутом круге своего наименьшего значения, т.е.в замкнутом круге C существует такая точка* x_0*, что* $\varphi(x_0) \ll \varphi(x)$ *для всякого x из круга C.*

Без доказательства.

Заметим, что действительной функцией будет модуль многочлена. Что мы имеем для модуля многочлена? Согласно лемме 2 о возрастании модуля многочлена можно указать такое число $N > 0$, что при $|x| > N$, будет $|f(x)| > |f(0)|$. Возьмем теперь радиус R круга C равным N. Пусть x_0 - точка минимума $|f(x)|$ в замкнутом круге C радиуса N . Тогда для всех точек x этого замкнутого круга будет иметь место неравенство $|f(x_0)| \ll |f(0)| < |f(x)|$ для всех x как внутри круга, так и вне круга, т. е. на всей комплексной плоскости. Таким образом, модуль многочлена имеет точку минимума на всей комплексной плоскости.

Доказательство основной теоремы алгебры. Докажем, что точка минимума модуля многочлена является его корнем. От противного. Допустим, что $f(x_0) \neq 0$. Применим лемму Даламбера. Существует такое комплексное число $\mathrm{h} \neq 0$, что $|\mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \mathrm{h}| < |\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)|$. Но тогда это противоречит тому, что точка x_0 - точка минимума модуля многочлена. Следовательно, допущение $f(x_0) \neq 0$ неверно, т.е. $f(x_0) = 0$.

■

Следствие 1. Неприводимым над полем комплексных чисел многочленами могут быть только линейные многочлены.

⊡

Пусть *f(x)* – многочлен, неприводимый над полем комплексных чисел. Он должен иметь хотя бы один комплексный корень x_0. Тогда *f(x)*=$(x - x_0)\cdot \varphi(x)$. Если бы многочлен $\varphi(x)$ имел степень, большую или равную 1, то $\varphi(x)$ имел бы корень, т. е. приводился. Однако это не так, следовательно, $\varphi(x)$ - константа.
Следовательно, неприводимый над полем комплексных чисел многочлен имеет вид : $kx + b$, т. е является линейным.

■

Следствие 2. *Всякий многочлен f(x)=*$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ *степени* n, $n \gg 1$, *имеет над полем комплексных чисел столько комплексных корней, какова его степень.*

⊡

Очевидно, что выделяя в f(x) все линейные сомножители, получаем разложение

$$f(x)=a_n (x - x_1)^{\propto_1} \ldots (x - x_k)^{\propto_k},$$

единственное с точностью до перестановки сомножителей, при этом

$$\propto_1 + \propto_2 + \cdots + \propto_k = n.$$

■

Следствие 3. *Пусть f(x)=*$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ *- многочлен степени* n, $n \gg 1$, *с действительными коэффициентами. Тогда комплексные корни этого многочлена комплексно сопряжены, т. е. если* x_0 *– комплексный корень, то и* $\overline{x_0}$ *– также корень исходного многочлена.*

⊡ *Пусть* x_0 *- корень многочлена* $f(x)$ *, т. е.*

$$f(x_0)=a_n {x_0}^n + a_{n-1}{x_0}^{n-1} + \ldots + a_1 {x_0}^1 + a_0 = 0.$$

Тогда

$$\overline{f(x_0)} = \overline{a_n {x_0}^n + a_{n-1}{x_0}^{n-1} + \ldots + a_1 {x_0}^1 + a_0} = \bar{0} = 0.$$

Но

$\overline{a_n x_0{}^n + a_{n-1} x_0{}^{n-1} + \ldots + a_1 x_0{}^1 + a_0} = \overline{a_n x_0{}^n} + \overline{a_{n-1} x_0{}^{n-1}} + \cdots + \overline{a_0} =$

$= \overline{a_n}\,\overline{x_0{}^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{x_0{}^{n-1}} + \cdots + \overline{a_0} = a_n |\overline{x_0}|^n + a_{n-1} |\overline{x_0}|^{n-1} + \cdots + a_0.$

Следовательно, $a_n |\overline{x_0}|^n + a_{n-1} |\overline{x_0}|^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, т.е. $\overline{x_0}$ является корнем многочлена *f(x)*.

■

Следствие 4. *Неприводимыми над полем действительных чисел могут быть многочлены только многочлены не выше второй степени.*

⊡ *Пусть f(x)=*$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ - многочлен степени n, n $\gg 1$, с действительными *коэффициентами, неприводимый над полем действительных чисел, и* x_0 – комплексный корень многочлена. Тогда и $\overline{x_0}$ – также корень. Следовательно, многочлен делится на квадратный трехчлен

(x- (a+bi))(x-(a-bi))=$x^2 - 2(a - bi + bi)x + a^2 - b^2 = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$.

Но многочлен неприводим над полем действительных чисел, следовательно, с точностью до константного множителя, многочлен совпадает с квадратным трехчленом $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$, который неприводим над полем действительных *чисел, т. е. n*$\ll 2$.

■

Следствие 5. *Всякий многочлен с действительными коэффициентами степени* n $\gg 1$ *со старшим коэффициентом* a_n *разлагается над полем действительных чисел на множитель* a_n *и линейные и квадратные неприводимые множители со старшими коэффициентами, равными единице, причем каждому линейному множителю соответствует действительный корень, а каждому неприводимому квадратному множителю пара чисто комплексных сопряженных корней. Это разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей.*

⊡

Доказательство очевидно.

■

Следствие 6. *Чисто комплексные сопряженные корни* x_0 *и* $\overline{x_0}$ *многочлена f(x) с действительными коэффициентами должны иметь одну и ту же кратность.*

⊡ *Очевидно, что в противном случае, будет непарный комплексный корень, т. е. комплексный корень, сопряженный к которому не будет корнем многочлена f(x) с действительными коэффициентами, что противоречит следствию 3.*

■

Следствие 7. *Число чисто комплексных корней многочлена всегда четно.*

⊡

Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами встречаются парами. Значит, число чисто комплексных корней многочлена четно.

■

Следствие 8.*Многочлены нечетной степени всегда имеют хотя бы один действительный корень.*

⊡ *Доказательство – прямое логическое следование из следствия 7.*

■