Лекция №9

Тема: Симметрические многочлены

План лекции:

1. Понятие симметрического многочлена
2. Основная теорема о симметрических многочленах
3. Пример решения задачи на симметрические многочлены
4. Теорема о единственности выражения симметрического многочлена через основные симметрические многочлены

Литература:

1. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. – М.: Изд-во «Просвещение», 1966. – 336. (Параграф 22).

Текст лекции

Мы рассмотрим здесь один важный класс многочленов от нескольких неизвестных, так называемые *симметрические многочлены*.

Симметрическим многочленом над числовым полем P принято называть такой многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n неизвестных над P, который не меняется при любой перестановке неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Например, многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \quad (1)$$

является симметрическим; легко убедиться, что он не меняется при любой перестановке неизвестных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_3, x_2, x_1) = f(x_2, x_1, x_3) =$$
$$= f(x_2, x_3, x_1) = f(x_1, x_3, x_2) = f(x_3, x_1, x_2).$$

Возьмем хотя бы

$$f(x_3, x_2, x_1) = x_3^2x_2 + x_3x_2^2 + x_3^2x_1 + x_3x_1^2 + x_2^2x_1 + x_2x_1^2. \quad (2)$$

Для получения выражения $f(x_3, x_2, x_1)$ мы в выражении (1) многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$ неизвестное x_1 заменили через x_3, x_2 оставили без изменения, а x_3 заменили через x_1. Сравнивая выражения (1) и (2), видим, что они отличаются друг от друга лишь порядком следования членов и порядком следования сомножителей в каждом члене. Следовательно,

$$f(x_3, x_2, x_1) = f(x_1, x_2, x_3).$$

Впервые приходится сталкиваться с симметрическими многочленами при решении следующей задачи: пусть дано уравнение n-й степени над полем P

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad 3)$$

со старшим коэффициентом, равным единице. Выразить коэффициенты a_i уравнения через корни $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Но мы уже знаем (см. § 13), что коэффициенты уравнения (3) должны выражаться через корни по формулам Виета, а именно:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n),\\ a_2 &= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\ldots+\xi_{n-1}\xi_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n &= (-1)^n\xi_1\xi_2\ldots\xi_n. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Руководствуясь этими формулами, составим теперь следующие многочлены от n неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1+x_2+\ldots+x_n\\ \sigma_2 &= x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sigma_n &= x_1x_2\ldots x_n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Легко видеть, что многочлены (5) являются симметрическими[1]. В самом деле, равенства (4), очевидно, не зависят от нумерации корней $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Мы могли бы, например, корню ξ_1 приписать другой номер, хотя бы 2, а корню ξ_2 — номер, равный единице; это изменение нумерации ни в какой мере не нарушило бы равенств (4), так как при их выводе совершенно безразлично, какой корень следует обозначать через ξ_1, какой — через ξ_2 и т. д.

Многочлены (5) называются *основными* или *элементарными симметрическими многочленами* от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$.

Из определения симметрического многочлена следует, что если симметрический многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ содержит член

$$Ax_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n},$$

то он содержит все члены вида $Ax_1^{\lambda_{i_1}}x_2^{\lambda_{i_2}}\ldots x_n^{\lambda_{i_n}}$, получающиеся из данного любыми перестановками показателей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Далее, нетрудно заметить, что сумма, разность и произведение двух симметрических многочленов над полем P в свою очередь являются симметрическими многочленами над тем же полем P.

Вернемся к основным симметрическим многочленам. Они играют в теории симметрических многочленов исключительную роль благодаря следующей теореме.

Основная теорема о симметрических многочленах. *Всякий симметрический многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n неизвестных над полем P может быть выражен в виде многочлена от основных симметрических многочленов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ над тем же полем P: $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — многочлен от $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ над P.*

---

[1] Так как всякое числовое поле содержит 1, то $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — многочлены над любым числовым полем P.

В силу неравенств (7) эти значения x_i будут целыми неотрицательными числами.

Итак, вычитая из многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ выражение

$$A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}\sigma_n^{\alpha_n},$$

мы уничтожим член (6) и получим симметрический многочлен

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_n^{\alpha_n},$$

состоящий из более низких членов. Пусть $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}$ — высший член многочлена $f_1(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда мы снова повторим процесс понижения высоты членов — вычтем из многочлена $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ выражение $B\sigma_1^{\beta_1-\beta_2}\sigma_2^{\beta_2-\beta_3}\ldots\sigma_n^{\beta_n}$, в результате чего получится симметрический многочлен

$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) - B\sigma_1^{\beta_1-\beta_2}\sigma_2^{\beta_2-\beta_3}\ldots\sigma_n^{\beta_n}$$

и т. д. Этот процесс, однако, не бесконечен: если на k-м шагу получается симметрический многочлен $f_k(x_1, \ldots, x_n)$ с наивысшим членом

$$Lx_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}, \tag{10}$$

то, с одной стороны, его показатели λ_i удовлетворяют условию $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, а, с другой стороны, $\alpha_1 \geqslant \lambda_1$, так как член (6) выше члена (10). Но соотношениям $\alpha_1 \geqslant \lambda_1$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ может удовлетворять лишь конечное множество систем целых неотрицательных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, наш процесс должен закончиться, т. е. неизбежно должно получиться

$$f_{s-1}(x_1, \ldots, x_n) - H\sigma_1^{\omega_1-\omega_2}\sigma_2^{\omega_2-\omega_3}\ldots\sigma_n^{\omega_n} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_n^{\alpha_n} + \ldots + H\sigma_1^{\omega_1-\omega_2}\sigma_2^{\omega_2-\omega_3}\ldots\sigma_n^{\omega_n},$$

т. е. многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$, выразился в виде многочлена от $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ над тем же самым полем P. Теорема доказана.

Отметим одно довольно важное следствие из основной теоремы о симметрических многочленах.

Следствие. *Пусть*

$$\varphi(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

— многочлен от неизвестного x над полем P и со старшим коэффициентом, равным единице, и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — комплексные корни этого многочлена. Тогда любой симметрический многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n неизвестных над тем же самым числовым полем P будет иметь при $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$ значение, принадлежащее полю P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Расположим члены многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$ лексикографически и возьмем его высший член

$$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \tag{6}$$

Покажем, что показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ высшего члена (6) должны удовлетворять неравенствам

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n. \tag{7}$$

Действительно, симметрический многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$, кроме члена (6), должен содержать также все члены, получающиеся с помощью перестановок неизвестных $x_1, \dots, x_n$; в частности, переставляя x_1 и x_2, мы получим из члена (6) член

$$Ax_1^{\alpha_2}x_2^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

того же симметрического многочлена. Этот член не может быть выше члена (6). Следовательно, показатель при x_1 в этом члене не может превосходить показателя при x_1 в члене (6): $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$.

Точно так же, сравнивая член (6) с членом

$$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n},$$

получающимся из (6) путем перестановки неизвестных x_2 и x_3, приходим к заключению, что $\alpha_2 \geqslant \alpha_3$ и т. д.

Очевидно, что

$$A\sigma_1^{\varkappa_1}\sigma_2^{\varkappa_2} \dots \sigma_n^{\varkappa_n}, \tag{8}$$

где $\varkappa_i$ — целые неотрицательные числа, есть также симметрический многочлен от $x_1, \dots, x_n$ над P. Попытаемся подобрать числа $\varkappa_i$ так, чтобы высший член симметрического многочлена (8) совпадал с членом (6).

Основные симметрические многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ имеют высшими членами соответственно $x_1, x_1x_2, \dots, x_1x_2 \dots x_n$. Следовательно, согласно лемме о высшем члене произведения многочленов (см. § 21, стр. 120) высшим членом симметрического многочлена (8) будет

$$Ax_1^{\varkappa_1}(x_1x_2)^{\varkappa_2} \dots (x_1x_2 \dots x_n)^{\varkappa_n} =$$
$$= Ax_1^{\varkappa_1+\varkappa_2+\dots+\varkappa_n} x_2^{\varkappa_2+\dots+\varkappa_n} \dots x_n^{\varkappa_n}. \tag{9}$$

Таким образом, член (9) будет совпадать с членом (6) в том случае, если

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots + \varkappa_n = \alpha_1, \ \varkappa_2 + \varkappa_3 + \dots + \varkappa_n = \alpha_2, \ \dots, \ \varkappa_n = \alpha_n.$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\varkappa_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \ \varkappa_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \ \dots, \ \varkappa_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n, \ \varkappa_n = \alpha_n.$$

В силу неравенств (7) эти значения x_i будут целыми неотрицательными числами.

Итак, вычитая из многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ выражение

$$A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}\sigma_n^{\alpha_n},$$

мы уничтожим член (6) и получим симметрический многочлен

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_n^{\alpha_n},$$

состоящий из более низких членов. Пусть $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}$ — высший член многочлена $f_1(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда мы снова повторим процесс понижения высоты членов — вычтем из многочлена $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ выражение $B\sigma_1^{\beta_1-\beta_2}\sigma_2^{\beta_2-\beta_3}\ldots\sigma_n^{\beta_n}$, в результате чего получится симметрический многочлен

$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) - B\sigma_1^{\beta_1-\beta_2}\sigma_2^{\beta_2-\beta_3}\ldots\sigma_n^{\beta_n}$$

и т. д. Этот процесс, однако, не бесконечен: если на k-м шагу получается симметрический многочлен $f_k(x_1, \ldots, x_n)$ с наивысшим членом

$$Lx_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}, \qquad (10)$$

то, с одной стороны, его показатели λ_i удовлетворяют условию $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, а, с другой стороны, $\alpha_1 \geqslant \lambda_1$, так как член (6) выше члена (10). Но соотношениям $\alpha_1 \geqslant \lambda_1$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ может удовлетворять лишь конечное множество систем целых неотрицательных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, наш процесс должен закончиться, т. е. неизбежно должно получиться

$$f_{s-1}(x_1, \ldots, x_n) - H\sigma_1^{\omega_1-\omega_2}\sigma_2^{\omega_2-\omega_3}\ldots\sigma_n^{\omega_n} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_n^{\alpha_n} + \ldots + H\sigma_1^{\omega_1-\omega_2}\sigma_2^{\omega_2-\omega_3}\ldots\sigma_n^{\omega_n},$$

т. е. многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$, выразился в виде многочлена от $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ над тем же самым полем P. Теорема доказана.

Отметим одно довольно важное следствие из основной теоремы о симметрических многочленах.

Следствие. *Пусть*

$$\varphi(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

— многочлен от неизвестного x над полем P и со старшим коэффициентом, равным единице, и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — комплексные корни этого многочлена. Тогда любой симметрический многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n неизвестных над тем же самым числовым полем P будет иметь при $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$ значение, принадлежащее полю P.

В самом деле, согласно основной теореме о симметрических многочленах $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно выразить в виде многочлена $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ над тем же полем P. Полагая $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$, мы по формулам Виета получим для основных симметрических многочленов значения, равные соответственно $-a_1$, $a_2, \ldots, (-1)^n a_n$. Отсюда симметрический многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ примет значение $g(-a_1, a_2, \ldots, (-1)^n a_n)$, лежащее в поле P, так как коэффициенты многочленов $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $\varphi(x)$ лежат в P.

Метод выражения симметрических многочленов через основные, использованный в доказательстве основной теоремы, можно сделать довольно удобным в практическом отношении, если его дополнить способом неопределенных коэффициентов. При этом если симметрический многочлен не является формой, то рекомендуется его разложить на сумму форм различных степеней. Очевидно, что эти формы будут также симметрическими многочленами. Затем, пользуясь способом неопределенных коэффициентов, каждую из полученных форм выражают через основные симметрические многочлены. Рассмотрим в качестве иллюстрации следующий пример.

Пример. Выразить симметрический многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^3 x_3 + x_1^3 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2$$

над полем рациональных чисел через основные симметрические многочлены.

Данный многочлен есть сумма форм: $h = x_1^3 x_2^3 x_3 + x_1^3 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3^3$, $k = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2$.

Выражаем форму h через основные симметрические многочлены. Прежде всего обращаем внимание на то, что h — форма седьмой степени. Учтем все возможные высшие члены симметрических многочленов h_k, получающихся согласно доказательству основной теоремы. Высшим членом самой формы h является $x_1^3 x_2^3 x_3$, а h_k должны быть также формами седьмой степени. Таким образом, мы получаем следующую табличку всех возможных высших членов:

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 3 1	$x_1^3 x_2^3 x_3$	$\sigma_1^{3-3} \sigma_2^{3-1} \sigma_3^1 = \sigma_2^2 \sigma_3$
3 2 2	$A x_1^3 x_2^2 x_3^2$	$A \sigma_1^{3-2} \sigma_2^{2-2} \sigma_3^2 = A \sigma_1 \sigma_3^2$

Обращаем внимание читателя на то обстоятельство, что система показателей $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ каждого высшего члена должна удовлетворять условию $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ и в то же время сумма $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ должна равняться семи. Кроме того, каждая следующая система показателей должна соответствовать члену меньшей высоты.

Из приведенной таблички получается, что

$$h = \sigma_2^2\sigma_3 + A\sigma_1\sigma_3^2. \qquad (11$$

Остается определить A. Для этой цели даем неизвестным произвольные числовые значения, например $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Тогда основные симметрические многочлены примут значения

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3, \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 1,$$

а форма h примет значение, равное 3. Подставляя все эти значения в равенство (11), получаем: $3 = 9 + 3A$, откуда $A = -2$, и $h = \sigma_2^2\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_3^2$

Теперь составляем аналогичную табличку для второй формы k:

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
2 1 0	$x_1^2x_2$	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = \sigma_1\sigma_2$
1 1 1	$Ax_1x_2x_3$	$A\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 = A\sigma_3$

Отсюда

$$k = \sigma_1\sigma_2 + A\sigma_3. \qquad (12)$$

Полагая $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, получаем значения $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$ и $k = 6$. Подставляем все эти значения в равенство (12) и находим, что $6 = 9 + A$, откуда $A = -3$. Следовательно, $k = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$. Таким образом, окончательно получаем, что

$$f(x_1, x_2, x_3) = h + k = \sigma_2^2\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.$$

Существует, впрочем, и много других способов выражения симметрических многочленов через основные, но, несмотря на большое разнообразие таких способов, имеет место следующая теорема.

Теорема о единственности выражения симметрического многочлена через основные симметрические многочлены. *Всякий симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ над числовым полем P независимо от способа представляется единственным образом в виде многочлена от основных симметрических многочленов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ над тем же полем P.*

Предварительно докажем следующее свойство основных симметрических многочленов.

Свойство алгебраической независимости. *Равенство*

$$A_1\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\beta_1}\ldots\sigma_n^{\gamma_1} + A_2\sigma_1^{\alpha_2}\sigma_2^{\beta_2}\ldots\sigma_n^{\gamma_2} + \ldots + A_k\sigma_1^{\alpha_k}\sigma_2^{\beta_k}\ldots\sigma_n^{\gamma_k} = 0, \qquad (13)$$

левая часть которого есть многочлен от основных симметрических $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ с коэффициентами $A_1, A_2, \ldots, A_k$ из поля P, может иметь место только тогда, когда все коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_k$ равны нулю.

Доказательство. Прежде всего отметим, что каждое слагаемое левой части равенства (13) отличается от остальных слагаемых по меньшей мере одним показателем λ_i при σ_j (т. е. подобных членов не имеется). А теперь предположим противное — пусть все коэффициенты $A_1, \ldots, A_k$ не равны нулю[1]. Обратимся к члену

$$A_i\sigma_1^{\alpha_i}\sigma_2^{\beta_i}\ldots\sigma_n^{\nu_i}\ (i=1, 2, \ldots, k). \tag{14}$$

Он представляет собой некоторый многочлен от $x_1, \ldots, x_n$:

$$A_i\sigma_1^{\alpha_i}\sigma_2^{\beta_i}\ldots\sigma_n^{\nu_i}=A_i(x_1+\ldots+x_n)^{\alpha_i}(x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n)^{\beta_i}\ldots$$
$$\ldots(x_1x_2\ldots x_n)^{\nu_i}.$$

Найдем, чему равен высший член произведения (14). Так как $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ имеют высшими членами соответственно x_1, $x_1x_2, \ldots, x_1x_2\ldots x_n$, то по лемме о высшем члене произведения высшим членом произведения (14) будет:

$$A_ix_i^{\alpha_i+\beta_i+\ldots+\nu_i}x_2^{\beta_i+\ldots+\nu_i}\ldots x_n^{\nu_i}. \tag{15}$$

Легко видеть, что среди членов (15) подобных нет. Действительно, если бы, например, члены $A_ix_1^{\alpha_i+\beta_i+\ldots+\nu_i}x_2^{\beta_i+\ldots+\nu_i}\ldots x_n^{\nu_i}$ и $A_jx_1^{\alpha_j+\beta_j+\ldots+\nu_j}x_2^{\beta_j+\ldots+\nu_j}\ldots x_n^{\nu_j}$ были подобны, то у этих членов совпали бы показатели при одинаковых x_i:

$$\alpha_i+\beta_i+\ldots+\nu_i=\alpha_j+\beta_j+\ldots+\nu_j,$$
$$\beta_i+\ldots+\nu_i=\beta_j+\ldots+\nu_j,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\nu_i=\nu_j.$$

Но отсюда следовало бы, что $\alpha_i=\alpha_j$, $\beta_i=\beta_j$, $\ldots$, $\nu_i=\nu_j$, а это невозможно, так как в левой части равенства (13) подобных членов не имеется.

Пусть теперь среди членов (15) наивысшим является $A_1x_1^{\alpha_1+\beta_1+\ldots+\nu_1}x_2^{\beta_1+\ldots+\nu_1}\ldots x_n^{\nu_1}$. Тогда этот член будет высшим членом всей левой части равенства (13), рассматриваемой как многочлен от $x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, после замены $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ их выражениями через $x_1, \ldots, x_n$ равенство (13) примет вид $A_1x_1^{\alpha_1+\beta_1+\ldots+\nu_1}x_2^{\beta_1+\ldots+\nu_1}\ldots x_n^{\nu_1}+Q=0$, где через Q обозначена сумма членов меньшей высоты (если только такие имеются).

Так как $A_1\neq 0$, то получается противоречие с равенством нулю многочлена от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$.

[1] Члены с нулевыми коэффициентами можно опустить.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы о единственности выражения симметрического многочлена от основных симметрических многочленов.

Доказательство. Пусть, напротив, симметрический многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет над полем P два различных выражения через основные симметрические многочлены:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \varphi_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Тогда разность $\varphi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) - \varphi_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ была бы многочленом от $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, имеющим по меньшей мере один коэффициент, отличный от нуля, а, с другой стороны, эта разность равна нулю. Получается противоречие со свойством алгебраической независимости основных симметрических многочленов, и теорема доказана.