**ЛЕКЦИЯ №7.  ФОРМЫ МЫШЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ.**

***Вопросы:***

*1.Качества научного мышления.*

*2.Математическое мышление.*

*3.Математическое понятие и его характеристики*

*4.Пути формирования понятий. Классификация понятий.*

*5.Определение понятия. Виды определений.*

*6.Теорема. Виды теорем. Методы доказательства теорем.*

*КАЧЕСТВА НАУЧНОГО МЫШЛЕНИЯ*

Современное обучение характеризуется стремлением сделать развитие мышления школьников управляемым процессом, а основные приемы мышления – специальным предметом усвоения. Научное мышление характеризуют следующие качества:

* гибкость – умение целесообразно варьировать способы решения познавательной проблемы, легкость перехода от одного пути решения проблемы к другому; способность выходить за границы привычного способа действия, находить новые способы решения проблемы при из­менении задаваемых условий; умение перестраивать систему усвоен­ных знаний по мере овладения новыми знаниями и накопления опыта;
* оригинальность – высший уровень развития нешаблонного мышле­ния, необычность способов решения учащимися известных задач. Оригинальность мышления – следствие глубины мышления;
* глубина – способность проникать в сущность каждого изучаемого факта, в его взаимосвязь с другими фактами, выявлять специфические, скрытые особенности в изучаемом материале; умение конструировать модели конкретных ситуаций и т.д.;
* целесообразность – стремление осуществлять разумный выбор дей­ствий при решении какой-либо проблемы, постоянно ориентируясь на поставленную этой проблемой цель, а также стремление отыскать кратчайшие пути ее достижения;
* рациональность - склонность к экономии времени и средств для ре­шения поставленной проблемы, стремление отыскать оптимально простое в данных условиях решение задачи, использовать в ходе реше­ния схемы, символику и условные обозначения;
* широта - способность к формированию обобщенных способов действий, имеющих широкий диапазон переноса и применения к част­ным, нетипичным случаям; умение охватить проблему в целом, обоб­щить ее, расширить область приложения результатов, полученных в процессе ее разрешения; а также умение классифицировать и система­тизировать изучаемые математические факты и использовать анало­гию и обобщение как методы решения задач;
* активность – постоянство усилий, направленных на решение неко­торой проблемы, желание обязательно решить данную проблему, изу­чить различные подходы к ее решению и др.;
* критичность – умение оценить правильность выбранных путей реше­ния поставленной проблемы и получаемые при этом результаты с точки зрения их достоверности и значимости; умение найти и исправить собст­венную ошибку, проследить заново все выкладки или ход рассуждения, чтобы выявить противоречие, помогающее понять причину ошибки;
* доказательность - умение терпеливо относиться к собиранию фак­тов, достаточных для вынесения какого-либо суждения; стремление к обоснованию каждого шага решения задачи; умение отличать досто­верные результаты от правдоподобных;
* организованность памяти – способность к запоминанию, долговре­менному сохранению, быстрому и правильному воспроизведению учебного материала. При обучении учащихся математике следует раз­вивать как оперативную, так и долговременную память, обучать уча­щихся запоминанию наиболее существенного, общих методов и прие­мов решения задач, доказательству теорем; формировать умения систематизировать свои знания и опыт. Организованность памяти формируется у школьников особенно эффективно, если запоминание каких-либо фактов основано на их понимании.

Не нуждаются в комментариях такие качества научного мышления, как ясность, точность, лаконичность устной и письменной речи. Совокуп­ность всех указанных качеств мышления называют научным стилем мышления.

*МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ*

Мышление есть активный процесс отражения объективного мира в сознании человека. Специфика предмета математики такова, что ее изучение существенно влияет на развитие мышления школьников, тесно связанное с формированием приемов мышления в процессе учебной деятельности. Эти приемы мышления (анализ, синтез, обоб­щение и др.) выступают также как специфические методы научного ис­следования, особенно ярко проявляющиеся при обучении математике как одного из базовых школьных предметов.

Основными целевыми компонентами математического образова­ния в школе являются:

* усвоение учениками системы математических знаний;
* овладение школьниками определенными математическими  
  умениями и навыками;
* развитие мышления учащихся.

Мыслительная деятельность школьников выполняется с помощью мыслительных операций: сравнения, анализа и синтеза, абстракции, обобщения и конкретизации.

Сравнение – это сопоставление объектов познания с целью нахож­дения сходства (выделения общих свойств) и различия (выделения особенных свойств) между ними. Сравнение лежит в основе всех дру­гих мыслительных операций.

Анализ – это мысленное расчленение предмета познаний на части.

Синтез – мысленное соединение отдельных элементов в единое це­лое. В реальном мыслительном процессе анализ и синтез всегда выпол­няются совместно.

Абстракция – это мысленное выделение каких-либо сущест­венных свойств и признаков объектов при одновременном отвле­чении от всех других их свойств и признаков. В результате абст­ракции выделенное свойство или признак становится предметом мышления.

Обобщение рассматривают как мысленное выделение:

* общих свойств (инвариантов) в двух или нескольких объек­тах и объединение этих объектов на основе выделенной общно­сти;
* существенных свойств объекта в результате анализа их в виде об­щего понятия для целого класса объектов (научно-теоретическое об­общение).

Конкретизация также выступает в двух формах:

* как мысленный переход от общего к единичному, частному;
* как восхождение от абстрактно-общего к частному, путем выяв­ления различных свойств и признаков объекта.

Различают три вида мышления:

1. Наглядно-действенное (познание объектов совершается в про­цессе практических действий с этими объектами).

2. Наглядно-образное (мышление с помощью наглядных обра­зов).

3. Теоретическое (в форме абстрактных понятий и суждений).

С развитием математики как науки и методики преподавания мате­матики изменилось содержание, которое вкладывалось в понятие ма­тематическое мышление, существенно возросла роль проблемы разви­тия мышления в процессе обучения математике.

Математическое мышление является одним из важнейших компо­нентов процесса познавательной деятельности учащихся, без целена­правленного развития которого невозможно достичь высоких резуль­татов в овладении школьниками системой математических знаний, умений и навыков.

Математические способности – это определенная совокупность не­которых качеств творческой личности, сформированных в процессе математической деятельности.

Математическая одаренность школьников характеризуется быст­рым схватыванием математического материала; тенденцией мыслить сокращенно, свернутыми структурами, стремлением к своеобразной экономии умственных усилий; наличием ярких пространственных представлений.

*МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОНЯТИЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ*

Первостепенная задача учителя мате­матики при изучении любой темы – формирование понятийного ап­парата темы.

Понятие – форма мышления, в которой отражены существенные (отличительные) свойства объектов изучения. Понятие считается правильным, если оно верно отражает реально существующие объ­екты.

Каждое понятие может быть рассмотрено по содержанию и объему. Содержание понятия раскрывается с помощью определения, объем - с помощью классификации. Посредством определения и классифика­ции отдельные понятия организуются в систему взаимосвязанных по­нятий.

Содержание понятия – это множество всех существенных призна­ков данного понятия.

Объем понятия – множество объектов, к которым применимо дан­ное понятие.

Например, понятие треугольник соединяет в себе класс всевозмож­ных треугольников (объем этого понятия) и характеристическое свой­ство – наличие трех сторон, трех вершин, трех углов (содержание по­нятия); понятие уравнение соединяет в себе класс всевозможных уравнений (объем понятия) и характеристическое свойство – равенст­во, содержащее одну или несколько переменных (содержание поня­тия).

Существенные (характеристические) свойства – это такие свойства, каждое из которых необходимо, а все вместе достаточны для характе­ристики объектов, принадлежащих понятию. Однако не каждое необходимое условие является достаточным и не каждое достаточное условие является необходимым. Например, ра­венство двух углов является необходимым условием для того, чтобы эти углы были вертикальные, но не является достаточным. Процесс конструирования понятий заключается в поиске такого числа необхо­димых условий, которое было бы достаточно для однозначного опреде­ления требуемого класса вещей. Совокупность этих условий и прини­мают за содержание понятия.

Так, содержанием понятия квадрата является совокупность усло­вий: быть четырехугольником, иметь равные стороны, иметь равные углы. Квадрат можно определить как четырехугольник с равными сто­ронами и равными углами.

Для понятия параллелограмм содержание будет представлено сле­дующими свойствами:

– противоположные стороны равны и параллельны;

– противоположные углы равны;

– диагонали в точке пересечения делятся пополам и др.

Объем понятия параллелограмм представлен множествами следую­щих четырехугольников: 1) собственно параллелограммы; 2) ромбы; 3) прямоугольники; 4) квадраты.

Содержание понятия четко определяет его объем, а объем понятия вполне определяет его содержание. Таким образом, изменение в содер­жании понятия влечет за собой изменение в его объеме, и наоборот. Между содержанием и объемом понятия существует обратная связь: с увеличением содержания понятия параллелограмм (диагонали взаим­но перпендикулярны) сразу уменьшается его объем (остаются лишь ромб и квадрат); если уменьшить содержание этого понятия (потребо­вать параллельности только двух противоположных сторон), увеличит­ся его объем (к названным четырехугольникам добавится трапеция).

Если объем одного понятия содержится в объеме другого, то второе понятие называется родовым по отношению к первому понятию, а пер­вое называется видовым по отношению ко второму. Например, поня­тие ромб является родовым по отношению к понятию квадрат. Введе­ние понятия через ближайший род и видовые заключается в следующем:

– указывается род, в который входит определяемое понятие;

– указываются видовые отличия и связь между ними.

Например, ромб – это параллелограмм, две смежные стороны ко­торого равны. Родовым понятием выступает понятие параллелограм­ма, из которого определяемое понятие выделяется посредством одного видового отличия (равенство смежных сторон).

В отношении объемов различают следующие виды понятий: равнозначные, объемы которых полностью совпадают; пересекающиеся, объемы которых частично пересекаются; находящиеся в отношении включения: объем одного понятия содер­жится в объеме другого понятия.

*ПУТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОНЯТИЙ*

Формирование понятий – сложный психологический процесс, ко­торый осуществляется и протекает по следующей схеме:

ощущения -> восприятие -> представление -> понятие.

Процесс формирования понятий состоит из мотивации введения понятия, выделения его существенных свойств, усвоения определе­ния, применения понятия, понимания связи изучаемого понятия с ра­нее изученными понятиями. Формирование понятия осуществляется в несколько этапов:

– мотивация (подчеркивается важность изучения понятия, активи­зируется целенаправленная деятельность школьников, возбуждается интерес к изучению понятия с помощью привлечения средств немате­матического содержания, выполнения специальных упражнений, объ­ясняющих необходимость развития математической теории);

– выявление существенных свойств понятия (выполнение упраж­нений, где выделяются существенные свойства изучаемого понятия);

– формулировка определения понятия (выполнение действий на распознавание объектов, принадлежащих понятию, конструирование объектов, относящихся к объему понятия).

Выделяют два пути формирования понятий.

Индуктивный

Дедуктивный.

Объем понятия раскрывается с помощью **классификации.** Под клас­сификацией понимают последовательное, многоступенчатое разделе­ние множества на классы с помощью некоторого свойства.

Правильная классификация поня­тий предполагает соблюдение следующих условий:

– классификация проводится по определенному признаку, остаю­щемуся неизменным в процессе классификации;

– понятия, получающиеся в результате классификации, – взаимно независимые;

– сумма объемов понятий, получающихся при классификации, рав­няется объему исходного понятия;

– в процессе классификации переходят к ближайшему в данном родовом понятии виду.

Пр. Натуральное число подразделяют на простое число, единицу и со­ставное число. Такая классификация натуральных чисел, а также клас­сификация треугольников по сторонам и углам позволяют наблюдать выполнение этих условий.

Остроугольные

Прямоугольные

Тупоугольные

Четырехугольник

Трапеция

Прямоугольник

Параллелограмм

Ромб

Квадрат

*ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ. ВИДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЙ*

Заключительным этапом формирования понятия является его оп­ределение. Определить понятие – значит перечислить его существен­ные свойства. Определение понятия – это предложение, в котором раскрывается содержание понятия, т.е. совокупность условий, необ­ходимых и достаточных для выделения класса объектов, принадлежа­щих определяемому понятию.

Явные и неявные определения различаются в зависимости от своей структуры. Явные определения содержат прямое указание на существен­ные признаки определяемого понятия; определяемое и определяющее в них выражены четко и однозначно. Например: «Углом называется фигу­ра, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки»; «Прямо­угольник есть параллелограмм с прямым углом».

Дескрипциями называются определения математических объектов путем указания их свойств («То число, которое, будучи умножено на длину диаметра, дает длину его окружности» – дескрипция числа п).

Неявные определения объектов не содержат четкого и однозначного определяющего элемента, в них содержание определяемого может быть установлено через некоторый контекст.

Номинальные и реальные определения. Все определения, которые применяются в математике и других науках, делятся на номинальные и реальные, в зависимости от того, что определяется – знаковое выраже­ние (термин, символ) или реальный объект, обозначаемый им. С по­мощью номинальных определений вводят новый термин, символ или выражение как сокращения для более сложных выражений из ранее введенных терминов или символов, или уточняется значение уже вве­денного термина или символа. Номинальные определения являются средством обогащения языка науки и уточнения семантики его выра­жений «Квадратным корнем из неотрицательного числа а называется такое неотрицательное число х, что

х2=а».

Индуктивными и контекстуальные. Например, по индукции вводится оп­ределение натурального числа в математике.

Аксиоматические определения. Определения исходных понятий, ко­торые даются посредством исходных понятий некоторой теории через ее аксиомы, – это аксиоматические определения. При аксиоматическом построении математической теории некоторые понятия остаются неопределенными, например, точка, плоскость и расстояние в аксиома­тике А.Н. Колмогорова. Определением этих понятий можно считать систему аксиом, описывающих их свойства.

Определения через род и видовые отличия. Это классические опреде­ления, которые можно рассматривать как частный вид номинальных определений. В них определяемое выделяется из предметов некоторой области, которая при этом явно упоминается в определении (род), пу­тем указания характеристического свойства определяемого (видовое отличие). Например: «Квадрат – прямоугольник с равными сторона­ми»; «Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны»; «Па­раллелограммом называется четырехугольник, противоположные сто­роны которого параллельны»; «Прямоугольник есть параллелограмм с прямым углом».

В школьном курсе математики через род и видовое отличие опреде­ляются: Длина ломаной. Периметр многоугольника (прямоугольника, квадрата). Квадрат. Куб. Круг. Радиус окружности (круга). Биссектри­са угла. Развернутый угол. Прямой угол. Градус. Острый угол. Тупой угол. Виды треугольников по величине углов. Фигуры, симметричные относительно точки (центр симметрии). Перпендикулярные и парал­лельные прямые.

Генетические определения. Это такие определения, в которых опи­сывается или указывается способ его происхождения, образования, возникновения, построения. Генетические определения представляют собой разновидность определения через род и видовые отличия. На­пример: «Сферой называется поверхность, полученная вращением по­луокружности вокруг своего диаметра»; «Шар – это геометрическое тело, образованное вращением полукруга вокруг диаметра».

В школьном курсе математики можно выделить следующие гене­тические определения понятий: Отрезок. Луч. Равносторонний тре­угольник. Координатный луч. Равные фигуры. Площадь прямоуголь­ника. Площадь квадрата. Объем прямоугольного параллелепипеда. Окружность. Дуга окружности. Сектор. Угол и его элементы. Равные углы. Длина окружности. Площадь круга.

Остенсивные определения. Это определения значений слов путем не­посредственного показа, демонстрации предметов. Часто применяют­ся в начальной школе (понятия отрезка, окружности, угла и др.). По­степенно с развитием математического опыта и накоплением определенного числа понятий на смену остенсивным понятиям прихо­дят вербальные понятия. Вербальные понятия – это понятия, в которых значения неизвестных выражений определяются через выражения, с известным значением.

Определение считается корректным, если выполняются два усло­вия:

1. отсутствует порочный круг и связанная с ним возможность ис­ключения нововведенных терминов («Решение уравнения – это то число, которое является его решением»);

2. отсутствует омонимия: каждый термин встречается не более од­ного раза в качестве определяемого.

*ТЕОРЕМА. ВИДЫ ТЕОРЕМ. МЕТОДИКА РАБОТЫ НАД ТЕОРЕМОЙ*

Формой связи понятий друг с другом является суждение. Если суж­дения правильно отображают объективно существующие зависимости между вещами, то такие суждения называют истинными; в противном случае суждения будут ложными. Процесс получения нового сужде­ния-вывода из одного или нескольких данных суждений называется умозаключением. Важнейшими видами сложных суждений являются теоремы и аксиомы (постулаты).

Аксиома (от греч. axioma – авторитетное предложение, «то, что при­емлемо») – предложение, принимаемое без доказательства. Аксиомы и первичные (неопределяемые) понятия составляют основной фунда­мент математической теории.

При изучении свойств различных математических объектов прихо­дится делать те или иные заключения, т.е. на основе понятий и сужде­ний того или иного раздела математики строить предложения, истин­ность которых необходимо обосновать.

Математическое предложение, истинность которого устанавлива­ется посредством доказательства (рассуждения), называется теоремой.

Существуют два вида формулирования теоремы: условный и кате­горический. Всегда можно из одного вида формулирования теоремы перейти в другой. Если теорема сформулирована в условной форме, то в ней должно быть ясно указано: при каких условиях рассматривается в ней тот или иной объект (условие теоремы) и что в этом объекте утвер­ждается (заключение теоремы) (схема 6).

Теорема:

В параллелограмме диагонали, пересекаясь, делятся пополам

Если четырехугольник – параллелограмм, то………………..

Условие Р

четырехугольник – параллелограмм, диагонали его пересекаются

Заключение G

точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам

Схема 6. Структура теоремы

Доказательство теоремы состоит в том, чтобы показать, что если выполняется условие, то из него логически следует заключение, т.е., приняв, что Р истинно, в соответствии с правилами вывода показать, что G истинно, и тем самым получить возможность утвердить, что дан­ное высказывание (теорема) истинно в целом.

Доказательство включает в себя три основных элемента:

1.Тезис (главная цель доказательства – установить истинность тези­са). Форма выражения тезиса – суждение.

2.Аргументы (основания) доказательства – положения, на которые опирается доказательство и из которых при условии их истинности необходимо следует истинность доказываемого тезиса. Форма выра­жения аргументов – суждения. Связывая аргументы, приходим к умозаключению, которые строятся по определенным правилам. Аргу­менты, на которые можно опереться при доказательстве: аксиомы, определения, ранее доказанные теоремы.

3.Демонстрация – логический процесс взаимосвязи суждений, в ре­зультате которого осуществляется переход от аргументов к тезису.

Известно, что, имея некоторую (прямую) теорему (Р =» G), можно образовать новые теоремы, и не одну:

G => Р – обратная;

Не Р => не G – противоположная;

Не G => не Р – контрапозитивная (обратная противоположной или противоположнообратная).

Между этими видами теорем существует тесная связь:

а) (Р=> G) и (не G => не Р) – одновременно истинны или ложны;

б) (G=> Р) и (не Р => не G) – одновременно истинны или ложны.

При изучении теорем школьного курса математики учитель при­держивается следующей последовательности:

1. Постановка вопроса (создание проблемной ситуации).

2. Обращение к опыту учащихся.

3. Высказывание предположения.

4. Поиск возможных путей решения.

5. Доказательство найденного факта.

6. Проведение доказательства в максимально простой форме.

7. Установление зависимости доказанной теоремы от ранее извест­ных.

Процесс изучения школьниками теоремы включает этапы: мотива­ция изучения теоремы; ознакомление с фактом, отраженным в теоре­ме; формулировка теоремы и выяснение смысла каждого слова в фор­мулировке теоремы; усвоение содержания теоремы; запоминание формулировки теоремы; ознакомление со способом доказательства; доказательство теоремы; применение теоремы; установление связей теоремы с ранее изученными теоремами.

*МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ*

Рассуждение с целью обоснования истинности какого-либо утвер­ждения называется доказательством. Существуют различные методы доказательства теорем. Под методом доказательства будем понимать способ связи аргументов при переходе от условия к заключению сужде­ния.

Методы доказательства, используемые в школьном курсе матема­тики, можно выделить по двум основаниям:

К косвенным приемам поиска доказательств относят:

* + метод «от противного» (истинность доказываемого тезиса устанавливается посредством опровержения противоречащего ему суждения);
  + разделительный метод, или метод разделения условий (тезис рассматривается как один из возможных вариантов предположений, когда все предположения отвергаются, кроме одного), иначе этот метод называют методом исключения.

К методам доказательства, выделенным по второму основанию, ко­гда способ связи аргументов согласуется с определенной математиче­ской теорией в школьном курсе математики, относят:

1. Метод геометрических преобразований.

2. Алгебраические методы (уравнений, неравенств, тождественных преобразований).

3. Векторный метод, использующий аппарат векторной алгебры.

4. Координатный метод – способ определения положения точки на прямой, на плоскости или в пространстве с помощью чисел (например, в декартовой системе координат или какой-либо другой). Используя координатный метод, алгебраические уравнения можно истолковать в виде геометрических образов (графиков или фигур) и, наоборот, ис­кать решение геометрических задач с помощью аналитических выра­жений (уравнений, неравенств или их систем).

При доказательстве математических утверждений используются разные математические методы.

Для того чтобы учащиеся овладели прямым и косвенным доказа­тельствами, необходимо сформировать у них определенную последо­вательность умений:

1. Искать доказательство;

2. Проводить доказательство;

3. Оформлять доказательство теоремы.

**Вопросы для самопроверки**

1. Какова роль мышления в учебном процессе? Охарактеризуйте качества научного мышления. Что такое математическое мышление? Назовите основные мыслитель­ные операции.

2. Что такое понятие? Охарактеризуйте главные логические характеристики понятия. Что значит «определить понятие»? Термин, род, вид, логическая связь. Что представ­ляют собой компоненты понятия (существенные и несущественные свойства)?

3. Каково соотношение между объемом и содержанием понятия?

4. Каковы способы определения понятий? Приведите примеры: а) через ближайший род и видовое отличие; б) генетический; в) индуктивный; г) абстрактный.

5. Охарактеризуйте методику введения понятий:

а) абстрактно-дедуктивным методом;

б) конкретно-индуктивным методом.

6. Какова роль определений в процессе усвоения понятий? Назовите виды определе­ний и охарактеризуйте их.

7. Раскройте содержание этапов формирования математических понятий и проиллю­стрируйте их на конкретных примерах.

8. Назовите структурные элементы теоремы. Формы теорем (категоричная и условная). Приведите примеры.

9. Какова взаимосвязь между прямой, обратной, противоположной, обратной проти­воположной теоремами?

10. Охарактеризуйте методы доказательства теорем.

11. Что представляют собой основные этапы работы над теоремой?

12. Дайте логико-математический анализ теоремы (по выбору).