Лекция №5

Тема: Границы корней. Отделение действительных корней

План лекции:

1. Первый способ нахождения границы действительных корней.
2. Метод Ньютона (второй способ) нахождения границы действительных корней.
3. Пример отделения корней с помощью графика функции.
4. Способ Штурма отделения корней.
5. Теорема Штурма.
6. Пример отделения корней с помощью метода Штурма.

Литература:

1.Окунев Л. Я. Высшая алгебра. – М.: Изд-во «Просвещение», 1966. – 336. (Параграфы 15-16).

Текст лекции

При решении различных проблем математики, механики, физики и техники часто приходится делать те или иные заключения о расположении корней многочлена с числовыми коэффициентами, не зная его корней. При этом нередко существенную роль играют методы нахождения границ действительных корней многочлена с действительными коэффициентами и методы отделения действительных корней, т. е. способы нахождения таких интервалов, в каждом из которых лежит один и только один действительный корень данного многочлена (уравнения).

Многочлены с действительными коэффициентами мы будем рассматривать как действительные непрерывные[1] функции действительного переменного x. На протяжении этого и следующего параграфа мы будем коротко говорить «многочлен» («уравнение»), имея в виду многочлен (уравнение) с действительными коэффициентами.

Мы разберем здесь два способа нахождения границ корней.

Первый способ. Нетрудно убедиться, что действительные корни многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$, следует искать в интервале $(-M, M)$, где $M = \frac{A}{|a_0|} + 1$, A—наибольшая из абсолютных величин коэффициентов $a_1, \dots, a_n$.

В самом деле, величина M есть верхняя граница модулей комплексных корней многочлена $f(x)$ (см. стр. 84), а потому действительные корни многочлена $f(x)$ должны лежать в интервале $(-M, M)$.

[1] Непрерывность многочлена (целой рациональной функции) доказывается в курсе математического анализа.

Пример. Рассмотрим уравнение:

$$f(x) = 2x^5 + 100x^2 - 5x - 40 = 0.$$

Здесь $a_0 = 2$, $A = 100$, откуда $M = \frac{100}{2} + 1 = 51$. Таким образом, действительные корни (если они имеются) следует искать между -51 и 51.

К сожалению, этот простой способ нахождения границ действительных корней обладает одним существенным недостатком: обычно получается слишком большое M. Поэтому мы сейчас укажем другой, более совершенный способ.

Второй способ (способ Ньютона). Он основан на следующем предложении: *если все производные $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ многочлена n-й степени $f(x)$ положительны при $x = c$ ($c > 0$), но $f(c) < 0$, то существует такое число $a > c$, что при $x = a$ будет положителен и сам многочлен $f(x)$ вместе со своими производными $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$.*

Доказательство. Разложим $f(x)$ по степеням $x - c$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(c) + (x - c) f'(c) + \ldots + (x - c)^n \frac{f^{(n)}(c)}{n!}. \qquad (1)$$

По условию $f'(c)$, ..., $f^{(n)}(c)$ положительны. Следовательно, члены

$$(x - c) f'(c), \ \ldots, \ (x - c)^n \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

при $x > c$ положительны и неограниченно возрастают при возрастании $x > c$. Поэтому можно указать такое достаточно большое число $a > c$, чтобы при $x = a$ член $f(c)$ разложения (1) поглощался положительной суммой остальных членов и тогда будет $f(a) > 0$.

Что касается производных $f'(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, то они и подавно будут положительны при $x = a$:

$$f'(a) = (a - c) f''(c) + \ldots + (a - c)^{n-1} \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} > 0,$$

так как члены

$$(a - c) f''(c), \ \ldots, \ (a - c)^{n-1} \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}$$

положительны. Аналогично

$$f''(a) = (a - c) f'''(c) + \ldots + (a - c)^{n-2} \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!} > 0.$$

и т. д. Предложение доказано.

Легко видеть, что *число $a > 0$, при котором многочлен $f(x)$ и все его производные $f'(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ положительны, является верхней границей положительных корней многочлена.*

В самом деле, при $x > a$ все члены разложения

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

будут, очевидно, положительны, в силу чего $f(x) > 0$ при $x > a$. Следовательно, при $x > a$ многочлен $f(x)$ не может обращаться в нуль и потому его действительные корни должны быть меньше a.

Таким образом, мы приходим к следующему способу определения границ действительных корней многочлена $f(x)$.

Способ Ньютона. Старший коэффициент данного многочлена n-й степени $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$ всегда можно сделать положительным, стоит только $f(x)$ умножить на -1. Поэтому пусть $a_0 > 0$. Обращаемся к $(n-1)$-й производной $f^{(n-1)}(x) = (n-1)!(na_0 x + a_1)$. Если $x > -\frac{a_1}{na_0}$, то $f^{n-1}(x) > 0$. Следовательно, можно подобрать такое положительное число $c > -\frac{a_1}{na_0}$, чтобы производная $f^{(n-1)}(x)$ при $x = c$ была положительной. При этом n-я производная $f^{(n)}(x) = n!\, a_0$ положительна при всех значениях x, так как $a_0 > 0$.

Отсюда по доказанному выше можно подобрать такое $c_1 > c$, чтобы при $x = c_1$ были положительными $f^{(n-2)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$ и $f^{(n)}(x)$. Поскольку $f^{(n-2)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$ положительны при $x = c_1$ можно подобрать такое $c_2 > c_1$, чтобы при $x = c_2$ были положительными $f^{(n-3)}(x)$, $f^{(n-2}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$ и т. д. В конечном счете мы доберемся до $f(x)$ и найдем для него верхнюю границу положительных корней.

Чтобы найти нижнюю границу положительных корней $f(x)$, заменяем x через $\frac{1}{y}$ и рассматриваем многочлен $g(y) = y^n f\left(\frac{1}{y}\right)$. Если b — верхняя граница положительных корней $g(y)$, то $\frac{1}{b}$ будет нижней границей положительных корней данного многочлена $f(x)$.

Чтобы найти верхнюю границу отрицательных корней $f(x)$, полагаем $x = -\frac{1}{z}$ и рассматриваем многочлен $h(z) = z^n f\left(-\frac{1}{z}\right)$. Если c — верхняя граница положительных корней $h(z)$, то $-\frac{1}{c}$ будет верхней границей отрицательных корней $f(x)$.

Наконец, чтобы найти нижнюю границу отрицательных корней $f(x)$, полагаем $x = -u$ и рассматриваем многочлен $k(u) = f(-u)$. Если d — верхняя граница положительных корней $k(u)$, то $-d$ будет нижней границей отрицательных корней $f(x)$.

Таким образом, все положительные корни многочлена $f(x)$ следует искать в интервале $\left(\frac{1}{b}, a\right)$, а все отрицательные корни—в интервале $\left(-d, -\frac{1}{c}\right)$.

Пример. Найти по способу Ньютона границы действительных корней уравнения:

$$f(x) = 2x^5 + 100x^2 - 5x - 40 = 0. \tag{2}$$

Составляем производные:

$$f'(x) = 5(2x^4 + 40x - 1),\ f''(x) = 40(x^3 + 5),$$
$$f'''(x) = 120x^2,\ f^{IV}(x) = 240x,\ f^{V}(x) = 240.$$

Сразу видно, что при $x = 1$ все производные от первого до пятого порядка положительны. Подставляем значение $x = 1$ в многочлен $f(x)$ и находим, что $f(1) = 57 > 0$. Следовательно, 1 можно принять за верхнюю границу положительных корней данного уравнения.

Для нахождения нижней границы положительных корней заменяем в уравнении (2) x через $\frac{1}{y}$. После некоторых преобразований получится:

$$\varphi(y) = 40y^5 + 5y^4 - 100y^3 - 2 = 0.$$

Составляем производные:

$$\varphi'(y) = 20y^2(10y^2 + y - 15),\ \varphi''(y) = 20y(40y^2 + 3y - 30),$$
$$\varphi'''(y) = 120(20y^2 + y - 5),\quad \varphi^{IV}(y) = 120(40y + 1),\quad \varphi^{V}(y) = 4800.$$

При $y = 1$ производные $\varphi''(y)$, $\varphi'''(y)$, $\varphi^{IV}(y)$ и $\varphi^{V}(y)$ положительны. Однако производная $\varphi'(y)$ отрицательна при $y = 1$. Поэтому берем для y несколько большее значение, например 2, и находим, что $\varphi'(2) = 2160 > 0$. Но $\varphi(y)$ при $y = 2$ также положительно: $\varphi(2) = 558 > 0$. Следовательно, 2 — верхняя граница положительных корней $\varphi(y)$, откуда $\frac{1}{2}$ будет нижней границей положительных корней данного уравнения (2).

Для нахождения верхней границы отрицательных корней полагаем в уравнении (2) $x = -\frac{1}{z}$. Получится:

$$\psi(z) = 40z^5 - 5z^4 - 100z^3 + 2 = 0$$

и

$$\psi'(z) = 20z^2(10z^2 - z - 15),\quad \psi''(z) = 20z(40z^2 - 3z - 30),$$
$$\psi'''(z) = 120(20z^2 - z - 5),\ \psi^{IV}(z) = 120(40z - 1),\quad \psi^{V}(z) = 4800.$$

При $z = 2$ многочлен $\varphi(z)$ и все его производные положительны. Значит, 2 — верхняя граница положительных корней $\psi(z)$, откуда $-\frac{1}{2}$ будет верхней границей отрицательных корней уравнения (2).

Наконец, для нахождения нижней границы отрицательных корней полагаем в уравнении (2) $x = -u$. Получаем:

$$\omega(u) = 2u^5 - 100u^2 - 5u + 40 = 0.$$

Предоставляем читателю самому убедиться, что 4 — верхняя граница положительных корней $\omega(u)$. Следовательно, — 4 будет нижней границей отрицательных корней уравнения (2).

Итак, положительные корни данного уравнения (2) следует искать в интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, а отрицательные — в интервале $\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$.

Мы видим, что способ Ньютона оказался более выгодным, чем первый способ.

Существует довольно много способов отделения действительных корней. Наиболее простым и наглядным, а в некоторых случаях и вполне достаточным является способ, основанный на построении графика заданного многочлена $f(x)$, а именно: пусть многочлен $f(x)$ не имеет кратных множителей; в противном случае мы их выделили бы. Составим график функции $y=f(x)$. Очевидно, что абсциссы точек пересечения графика с осью OX и будут действительными корнями данного многочлена[1]. Эти точки пересечения с осью OX, вообще говоря, будут строиться приближенно; таким образом, будет получаться не точное значение действительного корня, а более или менее тесный интервал, содержащий рассматриваемый корень.

Пример. Отделить при помощи графика действительные корни многочлена

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 1.$$

Этот многочлен не имеет отрицательных корней, так как он положителен при отрицательных значениях x. При помощи способа Ньютона находим, что 2—верхняя граница положительных корней данного многочлена $f(x)$. Таким образом, все действительные корни $f(x)$ лежат в интервале (0,2).

Теперь составляем табличку значений многочлена $f(x)$ в интервале (0,2), причем для x берем значения 0; 0,5; 1; 1,5 и 2:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	1	—0,7	—2	—2,2	1

Значения $f(0{,}5)$ и $f(1{,}5)$ вычислены с точностью до 0,1. Однако этой таблички еще недостаточно для построения графика, мы, строго говоря, не знаем, как ведет себя функция $y = f(x)$ в интервалах (0; 0,5), (0,5; 1), (1; 1,5) и (1,5; 2).

Обратимся к производной второго порядка:

$$f''(x) = 4(3x^2 - 3x + 1).$$

Она при всех значениях x положительна, так как не имеет действительных корней. Следовательно, первая производная

$$f'(x) = 2(2x^3 - 3x^2 + 2x - 2)$$

монотонно возрастает. Так как $f'(0) = -4 < 0$, $f'(0{,}5) = -3 < 0$, $f'(1) = -2 < 0$ и $f'(1{,}5) = 2 > 0$, то в интервалах (0; 0,5) и (0,5; 1) производная $f'(x)$ отрицательна, в интервале (1; 1,5) производная отрицательна до некоторой точки $x = c$, где она обращается в нуль, а потом положитель-

[1] Если бы были кратные множители, то график мог бы касаться оси OX в некоторых точках.

на и остается положительной в интервале (1,5; 2). Отсюда следует, что данный многочлен $f(x)$ в интервалах (0; 0,5) и (0,5; 1) убывает, в интервале (1; 1,5) продолжает убывать до точки $x = c$, а затем начинает возрастать и в интервале (1,5; 2) продолжает возрастать. Мы, таким образом, получаем следующий график (см. черт. 7). Из этого графика видно, что данный многочлен имеет всего два действительных корня: один лежит в интервале (0; 0,5), а другой — в интервале (1,5; 2).

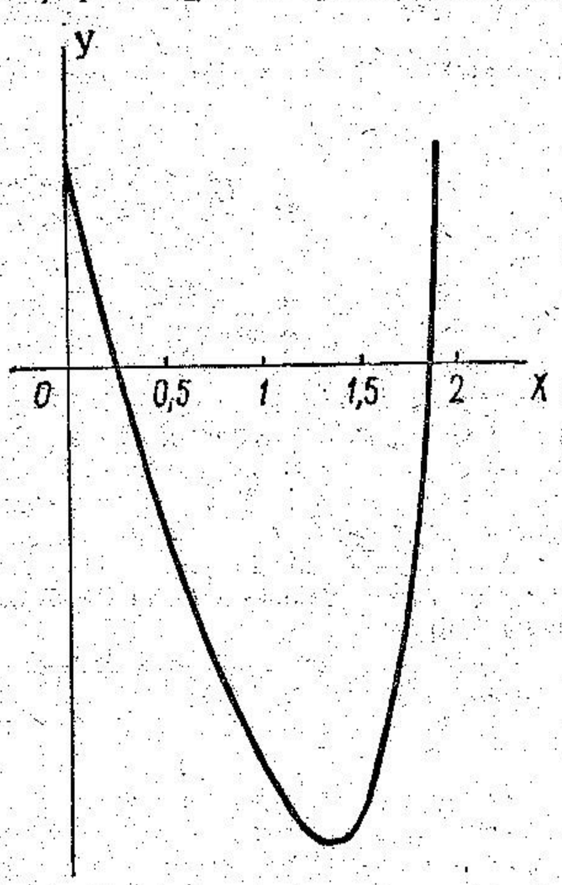

Рис. 7.

При отделении действительных корней многочлена $f(x)$ при помощи построения графика (и даже при другом способе) может оказаться полезным следующее свойство: *если значения $f(a)$ и $f(b)$ имеют одинаковые знаки, то в интервале (a, b) либо совсем нет действительных корней, либо имеется четное число действительных корней многочлена $f(x)$. Если же $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то в интервале (a, b) лежит нечетное число действительных корней многочлена $f(x)$.* При этом многочлен $f(x)$ может иметь кратные множители, приходится лишь каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Геометрически это свойство весьма наглядно. Ось OX делит плоскость XOY на две части: на верхнюю и нижнюю полуплоскости. Если $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то точки $A[a, f(a)]$ и $B[b, f(b)]$ находятся в разных полуплоскостях. Если знаки у $f(a)$ и $f(b)$ одинаковы, то точки A и B лежат в одной полуплоскости. С другой стороны, из одной полуплоскости в другую можно непрерывно перейти, пересекая ось OX один, три и вообще нечетное число раз. Напротив, пересекая ось OX четное число раз, мы будем возвращаться в исходную полуплоскость.

Приводим и алгебраическое доказательство. Если многочлен $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$, $n \geqslant 1$, $a_0 \neq 0$ совсем не имеет действительных корней, то он разлагается над полем действительных чисел только на квадратные множители

$$f(x) = a_0(x^2 + p_1x + q_1) \ldots (x^2 + p_kx + q_k),$$

причем каждый множитель $x^2 + p_\nu x + q_\nu$ будет положителен при любом значении x. Отсюда при любом значении x многочлен $f(x)$ будет иметь один и тот же знак, совпадающий со знаком его старшего коэффициента a_0. В частности, $f(a)$ и $f(b)$ будут одинакового знака.

Если многочлен $f(x)$ имеет действительные корни $x_1, \ldots, x_s$ ($1 \leqslant s \leqslant n$; каждый корень считается столько раз, какова его кратность), то он разложится над полем действительных чисел на линейные и (в случае $s < n$) на квадратные множители:

$$f(x) = a_0(x - x_1) \ldots (x - x_s)(x^2 + p_1x + q_1) \ldots (x^2 + p_kx + q_k)$$

$$\left(k = \frac{1}{2}(n - s)\right).$$

Если корень x_j не лежит в интервале (a, b), то соответствующий линейный множитель $x-x_j$ будет сохранять постоянный знак при изменении x от a до b. Совсем другое наблюдается, когда x_j лежит в интервале (a, b); в этом случае $x-x_j$ при переходе x от a до b изменит свой знак на противоположный. Что касается квадратных трехчленов $x^2+p_\nu x+q_\nu$, то они, как мы знаем, положительны независимо от значений x. Таким образом, $f(a)$ и $f(b)$ будут иметь разные знаки тогда и только тогда, когда в интервале (a, b) лежит нечетное число действительных корней.

Наиболее совершенным в теоретическом отношении является способ Штурма отделения действительных корней. Но прежде чем переходить к изложению этого способа, сделаем несколько замечаний.

1. Пусть дана упорядоченная ненулевая система действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geqslant 1)$[1], например

$$5, -8, -7, 1. \tag{1}$$

Мы видим, что знаки чисел системы чередуются следующим образом:

$$+ - - +$$

и меняются два раза: один раз в начале с плюса на минус и один раз в конце с минуса на плюс, т. е. в системе чисел (1) наблюдается две перемены знаков.

Числам, равным нулю, мы не приписываем никакого определенного знака, т. е., попросту говоря, выбрасываем из системы при подсчете количества перемен знаков. Так, в системе $5, 0, -8, 1, -3, 0, 0, 2, -5, -7, 0$ наблюдается пять перемен знаков, а в системе $5, 5, 8, 0, 0, 2, 0$ количество перемен знаков равно нулю.

2. Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен степени $n \geqslant 1$. Мы можем предположить, что многочлен $f(x)$ не имеет кратных множителей, т. е. он взаимно прост со своей производной $f'(x)$. В самом деле, если бы $f(x)$ имел кратные множители, то мы их заранее выделили бы.

Применим алгоритм Евклида к $f_0(x)=f(x)$ и $f_1(x)=f'(x)$ с тем только отступлением, что мы будем каждый раз знак остатка менять на обратный. Например, если $r(x)$ — остаток от деления $f_0(x)$ на $f_1(x)$, то мы вместо него будем рассматривать $f_2(x) = -r(x)$. Таким образом, получаем:

$$\left.\begin{aligned} f_0(x) &= q_1(x) f_1(x) - f_2(x), \\ f_1(x) &= q_2(x) f_2(x) - f_3(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{m-2}(x) &= q_{m-1}(x) f_{m-1}(x) - f_m(x), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $f_m(x)$ — наибольший общий делитель многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x)$. Очевидно, что $f_m(x)$ должен быть многочленом нулевой степени, так как $f(x)$ и $f'(x)$ взаимно просты.

Упорядоченная система

$$f_0(x)=f(x),\ f_1(x)=f'(x),\ f_2(x), \ldots, f_m(x) \tag{3}$$

только что найденных многочленов обладает следующими важными свойствами.

а) *Никакие два соседних многочлена системы* (3) *не имеют общих корней.*

Для доказательства обратимся к равенствам (2).

Пусть два многочлена $f_k(x)$ и $f_{k+1}(x)$ имеют общий корень $x=a$; тогда $f_k(x)$ и $f_{k+1}(x)$ должны делиться на $x-a$. Рассмотрим теперь равенство

$$f_{k-1}(x) = q_k(x) f_k(x) - f_{k+1}(x).$$

Его правая часть, очевидно, делится на $x-a$; следовательно, и левая часть, т. е. $f_{k-1}(x)$, делится на $x-a$. Переходя к вышележащему равен-

[1] Т. е. система, в которой по меньшей мере одно число отлично от нуля.

ству, точно так же получим, что $f_{k-2}(x)$ делится на $x-a$ и т. д. Поднимаясь шаг за шагом вверх, мы, наконец, дойдем до $f_0(x)$ и $f_1(x)$ и обнаружим, что $f_0(x)$ и $f_1(x)$ делятся на $x-a$. Но это невозможно, так как $f_0(x)$ и $f_1(x)$ взаимно просты.

Назовем *промежуточным* многочленом системы (3) любой многочлен системы, кроме первого и последнего. Тогда

б) *Если a — действительный корень какого-нибудь промежуточного многочлена $f_k(x)$, то два соседних многочлена $f_{k-1}(x)$ и $f_{k+1}(x)$ имеют при $x=a$ противоположные знаки.*

Это свойство почти очевидно: из равенства

$$f_{k-1}(x)=q_k(x)f_k(x)-f_{k+1}(x)$$

получаем при $x=a$:

$$f_{k-1}(a)=-f_{k+1}(a),$$

так как по условию $f_k(a)=0$. При этом в силу предыдущего свойства а) числа $f_{k-1}(a)$ и $f_{k+1}(a)$ отличны от нуля.

в) *Если x, возрастая, проходит через действительный корень a многочлена $f_0(x)=f(x)$, то между многочленами $f_0(x)$ и $f_1(x)$ теряется одна перемена знаков,* т. е. произведение $f_0(x)\cdot f_1(x)$ меняет знак с минуса на плюс.

Справедливость этого свойства обнаруживается так. Многочлены $f_0(x)=f(x)$ и $f_1(x)=f'(x)$ не имеют общих корней. Следовательно, $f'(a)\neq 0$. Выберем столь малый промежуток $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, чтобы внутри и на его концах производная $f'(x)$ также не обращалась в нуль, т. е. сохраняла тот же знак, что и в точке $x=a$. Возможны только два случая: либо $f'(x)$ в промежутке $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ положительна, либо $f'(x)$ в этом промежутке отрицательна. Пусть, например, $f'(x)>0$. Тогда в рассматриваемом промежутке многочлен $f(x)$ будет возрастать; поэтому при переходе x через корень a многочлен $f(x)$ должен переходить от отрицательных значений к положительным. Получаем следующую табличку чередования знаков:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	Число перемен
$a-\varepsilon\leqslant x<a$	$-$	$+$	1
$a<x\leqslant a+\varepsilon$	$+$	$+$	0

Таким образом, между $f_0(x)$ и $f_1(x)$ сначала была перемена знаков, а после перехода через корень она потерялась. Подобный же результат получается и при $f'(x)<0$ (здесь многочлен $f(x)$ будет убывать).

г) *Последний многочлен системы* (3) *не имеет действительных корней,* т. е. сохраняет один и тот же знак при любых (действительных) значениях x.

В самом деле, $f_m(x)$ является многочленом нулевой степени и потому не обращается в нуль.

Систему многочленов (3) мы будем называть *системой функций Штурма* для $f(x)$. Наряду с этим *мы назовем также системой функций Штурма для $f(x)$ и любую упорядоченную систему отличных от нуля многочленов* (с действительными коэффициентами):

$$g_0(x)=f(x),\quad g_1(x),\ \ldots,\ g_l(x)$$

обладающих теми же четырьмя свойствами а), б), в), г), *что и система* (3).

Пример. Рассмотрим

$$f(x)=x^4-5x^2+8x-8.$$

Прежде всего следовало бы убедиться, не имеет ли многочлен $f(x)$ кратных множителей, но мы можем сразу начать с построения системы функций Штурма; если последняя функция системы Штурма окажется выше нулевой степени, то $f(x)$ имеет кратные множители и их придется отделить. Находим производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 10x + 8.$$

и делим $f(x)$ на $f'(x)$. Для сохранения свойств б) и в) умножать и сокращать можно только на положительные числа; таким образом, чтобы избежать дробных коэффициентов, умножаем $f(x)$ на положительное число 4 и делим на $f'(x)$:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 4x^4 - 20x^2 + 32x - 32 \\ 4x^4 - 10x^2 + 8x \end{array} & \begin{array}{l} 4x^3 - 10x + 8 \\ \hline x \end{array} \\ \cline{1-1} -10x^2 + 24x - 32 & \\ \text{(сокращаем на 2)} & \\ -5x^2 + 12x - 16. & \end{array}$$

Следовательно, меняя у остатка знаки на противоположные, получаем $g_2(x) = 5x^2 - 12x + 16$. Делим $f'(x)$ на $g_2(x)$, предварительно умножая $f'(x)$ на 25:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 100x^3 \qquad\qquad - 250x + 200 \\ 100x^3 - 240x^2 + 320x \qquad \end{array} & \begin{array}{l} 5x^2 - 12x + 16 \\ \hline 20x + 48 \end{array} \\ \cline{1-1} -\begin{array}{r} 240x^2 - 570x + 200 \\ 240x^2 - 576x + 768 \end{array} & \\ \cline{1-1} 6x - 568, & \end{array}$$

откуда $g_3(x) = -3x + 284$. Наконец, делим $9g_2(x)$ на $g_3(x)$:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 45x^2 - 108x + 144 \\ 45x^2 - 4260x \qquad \end{array} & \begin{array}{l} -3x + 284 \\ \hline -15x - 346 \end{array} \\ \cline{1-1} 4152x + 144 & \\ \text{(сокращаем на 4)} & \\ -\begin{array}{r} 1038x + 36 \\ 1038x - 98264 \end{array} & \\ \cline{1-1} 98300. & \end{array}$$

Остаток есть положительное число; поэтому $g_4(x)$ есть отрицательное число и можно просто положить $g_4(x) = -1$. В результате получилась такая система функций Штурма:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8, \\ g_1(x) &= \frac{1}{2} f'(x) = 2x^3 - 5x + 4, \\ g_2(x) &= 5x^2 - 12x + 16, \\ g_3(x) &= -3x + 284, \\ g_4(x) &= -1. \end{aligned}$$

Впрочем, функции $g_3(x)$ и $g_4(x)$ можно отбросить, а именно: легко заметить, что $g_2(x)$ не имеет действительных корней. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} g_0(x) &= f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8, \\ g_1(x) &= \frac{1}{2} f'(x) = 2x^3 - 5x + 4, \\ g_2(x) &= 5x^2 - 12x + 16 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

есть также система функций Штурма для $f(x)$.

Положим теперь $x = 0$. Тогда функции (4) примут следующие значения:

$$g_0(0) = -8, \quad g_1(0) = 4, \quad g_2(0) = 16.$$

Если положить $x = 2$, то получится:

$$g_0(2) = 4, \; g_1(2) = 10, \; g_2(2) = 12,$$

и мы можем составить такую табличку:

x	$g_0(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	Число перемен
0	$-$	$+$	$+$	1
2	$+$	$+$	$+$	0

Мы замечаем, что при переходе от $x = 0$ к $x = 2$ число перемен знаков в системе функций Штурма уменьшилось на 1, иными словами, потерялась одна перемена. Разгадка этого явления кроется в теореме Штурма.

Теорема Штурма. *Пусть многочлен $f(x)$ не имеет кратных множителей и $a < b$ — действительные числа, не являющиеся корнями $f(x)$. Тогда число действительных корней многочлена $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно числу потерянных перемен знаков в системе его функций Штурма при возрастании x от a до b.*

Доказательство. В самом деле, что происходит при возрастании x? До тех пор пока x не проходит через действительные корни функций

$$g_0(x) = f(x), \quad g_1(x), \; \ldots, \; g_l(x) \tag{5}$$

системы Штурма, число перемен знаков в системе (5) не изменяется.

Посмотрим, что происходит, когда x проходит через действительный корень a промежуточной функции $g_k(x)$.

Благодаря свойствам а) и б) $g_{k-1}(a)$ и $g_{k+1}(a)$ не равны нулю и имеют противоположные знаки. Возьмем столь малый отрезок $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, чтобы $g_{k-1}(x)$ и $g_{k+1}(x)$ на этом отрезке не имели действительных корней, т. е. сохраняли постоянный знак. Допустим для определенности, что для всех значений x в промежутке $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ $g_{k-1}(x) < 0$, $g_{k+1}(x) > 0$.
Тогда получается такая табличка знаков:

x	g_{k-1}	g_k	g_{k+1}
$a - \varepsilon \leqslant x < a$	$-$		$+$
$a < x \leqslant a + \varepsilon$	$-$		$+$

Какие бы знаки в пустых клетках ни ставить, всегда будет наблюдаться как при $x < a$, так и при $x > a$ одна перемена знаков, т. е. столько перемен, сколько их наблюдается и при выбрасывании пустых клеток. В остальных частях системы Штурма (5), где ни одна из функций не обращается при $x = a$ в нуль, число перемен знаков измениться не может, а там, где при $x = a$ в нуль обращается несколько промежуточных функций (эти промежуточные функции в силу свойства а) не могут быть соседними), число перемен знаков по только что доказанному также не меняется. Таким образом, если x, возрастая, проходит через действительный корень какой-нибудь промежуточной функции $g_k(x)$, то число перемен знаков в системе функций Штурма (5) остается без изменения, может произойти лишь перераспределение знаков.

Если x, возрастая, проходит через действительный корень самого многочлена $f(x)$ $(= g_0(x))$, то по свойству в) между $g_0(x) = f(x)$ и

$g_1(x)$, а потому и во всей системе функций Штурма теряется одна перемена знаков.

Наконец, случай, когда x проходит через действительный корень последней функции Штурма $g_l(x)$, отпадает, так как $g_l(x)$ по свойству г) не имеет действительных корней.

Итак, при возрастании x от a до b число перемен знаков в системе функций Штурма (5) должно уменьшиться на столько единиц, сколько действительных корней имеется на отрезке $[a, b]$. Теорема доказана.

При отделении действительных корней с помощью теоремы Штурма часто приходится пользоваться следующим свойством многочлена: *при достаточно больших по абсолютной величине значениях x знак многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ степени $n \geqslant 1$ совпадает со знаком его старшего члена a_0x^n.*

В самом деле, согласно теореме о модуле старшего члена (см. стр. 78) при $|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1$ имеет место неравенство $|a_0x^n| > |a_1x^{n-1} + \ldots + a_n|$, где A — наибольшая из абсолютных величин коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$. Следовательно, поскольку при $|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1$ старший член a_0x^n по абсолютной величине больше, чем сумма остальных членов, знак многочлена $f(x)$ будет уже при $|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1$ совпадать со знаком a_0x^n.

Пример. Отделить, пользуясь теоремой Штурма, действительные корни уравнения

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 12x + 1 = 0.$$

Составляем систему функций Штурма:

$$g_0(x) = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 12x + 1,$$

$$g_1(x) = \frac{1}{12} f'(x) = x^3 - x^2 - x - 1,$$

$$g_2(x) = 2x^2 + 5x$$

$$g_3(x) = -31x + 4,$$

$$g_4(x) = -1.$$

Прежде всего найдем число действительных корней. При достаточно большом по абсолютной величине значении x знак каждой функции Штурма совпадает со знаком ее старшего члена. Следовательно, обозначив достаточно большое положительное значение x через $+\infty$ и достаточно большое по абсолютной величине отрицательное значение x через $-\infty$, получим такую табличку:

x	$g_0(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$	Число перемен
$-\infty$	+	−	+	+	−	3
0	+	−	0	+	−	3 } потеряны две перемены
$+\infty$	+	+	+	−	−	1 }

При возрастании x от $-\infty$ до 0 число перемен осталось без изменения; стало быть, наше уравнение совсем не имеет отрицательных корней. Затем при возрастании x от 0 до $+\infty$ потерялись две перемены; поэтому уравнение имеет два положительных корня. Попробуем их отделить. При помощи способа Ньютона нетрудно убедиться, что верхняя граница положительных корней равна 3. Применяем теорему Штурма:

x	$g_0(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$	Число перемен
0	+	−	0	+	−	3 } потерялась одна перемена
1	−	−	+	−	−	2
2	−	+	+	−	−	2 } потерялась одна перемена
3	+	+	+	−	−	1

Итак, корни отделены: первый корень лежит в интервале $(0, 1)$, а второй — в интервале $(2, 3)$.

Недостатком метода Штурма является его громоздкость.