Лекция №8

Тема: Кольцо многочленов от нескольких неизвестных

План лекции:

1. Понятие многочлена от нескольких неизвестных
2. Операции над многочленами от нескольких неизвестных
3. Кольцевая структура
4. Однородные многочлены

Литература:

1.Окунев Л. Я. Высшая алгебра. – М.: Изд-во «Просвещение», 1966. – 336. (Параграф 21).

Текст лекции

Понятие многочлена от нескольких неизвестных вводится примерно так же, как и понятие многочлена от одного неизвестного.

Пусть P — некоторое числовое поле. Элементы поля P мы будем обозначать начальными малыми или большими буквами латинского алфавита.

Многочленом от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *над полем* P мы назовем выражение

$$A_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + A_sx_1^{\omega_1}x_2^{\omega_2}\ldots x_n^{\omega_n}, \ (s \geqslant 1), \qquad (1)$$

в котором коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_s$ являются числами из P, $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ — целыми неотрицательными числами и x_ν^0 $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ принимается равным единице. При этом $A_kx_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\ldots x_n^{\varkappa_n}$ называется *членом* выражения (1) и предполагается, что в выражении (1) подобных членов нет[1]. Кроме того, предполагается, что коэффициент, равный единице, можно опустить в записи члена: $1x_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\ldots x_n^{\varkappa_n} = x_1^{\varkappa_2}x_2^{\varkappa_1}\ldots x_n^{\varkappa_n}$ и что можно также опустить x_ν^0. В частности, если в члене

$$A_kx_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\ldots x_n^{\varkappa_n}$$

все показатели $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ равны нулю, то можно все $x_1^{\varkappa_1}, x_2^{\varkappa_2}, \ldots, x_n^{\varkappa_n}$ опустить и сохранить лишь один коэффициент A_k.

Например,

$$1 \cdot x_1^2x_2^0x_3^3x_4^0 = x_1^2x_3^3, \quad 2x_1^0x_2^0x_3^0x_4^0 = 2, \quad x_1^0x_2^0x_3^0x_4^0 = 1.$$

Т. е. нет членов, отличающихся друг от друга только коэффициентами.

Как и в случае многочлена от одного неизвестного, выражения x_ν, x_ν^2, ..., а также $A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, ..., $A_s x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots$ $\ldots x_n^{\omega_n}$ и знак «+» рассматриваются здесь как символы с некоторыми формальными правилами действия над ними (например, приравнивание x_ν^0 единице, выбрасывание в члене x_ν^0). В связи с этим $x_1, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*. В дальнейшем, после введения понятий равенства, суммы и произведения многочленов от нескольких неизвестных, символы $A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$ совпадут с произведением степеней неизвестных, взятым с числовым коэффициентом A_k, а само выражение (1) можно будет рассматривать как сумму различных (т. е. не подобных) членов вида $A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$.

Само число a из поля P мы будем рассматривать как многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а именно как многочлен $a x_1^0 x_2^0 \ldots$ $\ldots x_n^0$. Более того, выражения $a x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}$, где $\mu_1, \mu_2, \ldots$ $\ldots, \mu_n$ — целые неотрицательные числа, и, в частности, неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно рассматривать так же, как многочлены от $x_1, \ldots, x_n$ над P.

Для сокращения письма мы будем многочлен от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначать через $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., а иногда даже через f, g, h, ...

Может случиться, что некоторые неизвестные будут входить в каждый член многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ с нулевыми показателями, и тогда $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно рассматривать как многочлен уже не от n, а от меньшего количества неизвестных.

Например,

$$f = 2x_1^0 x_2^4 + x_1^0 x_2^3 x_3^2 + 5x_1^0 x_2 x_3$$

можно рассматривать не только как многочлен от трех неизвестных x_1, x_2, x_3, но и как многочлен от двух неизвестных x_2 и x_3:

$$f = 2x_2^4 + x_2^3 x_3^2 + 5x_2 x_3.$$

Введем теперь понятия равенства, суммы и произведения двух многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ над полем P.

Два многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ над P мы считаем *равными* (тождественными), если $f(x_1, \ldots, x_n)$ состоит из тех же членов, что и $g(x_1, \ldots, x_n)$, кроме членов с коэффициентами, равными нулю (если только такие члены имеются).

Например, многочлены $x_1^2 x_2 + x_1 x_2 x_3 + 5$ и $0 \cdot x_1^5 x_2 x_3 + 5 +$ $+ x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2$ равны, а $f = 3x_1 x_2^3 + x_1 x_2 x_3$ и $g = 3x_1 x_2^3 + 2x_1 x_2 x_3$ не равны, так как f содержит $x_1 x_2 x_3$ с коэффициентом, равным единице, а не двум.

В частности, многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ считается *равным нулю*, если все его коэффициенты $A_1, \ldots, A_s$ равны нулю. Таким образом, если многочлен не равен нулю, то по меньшей мере один из его коэффициентов должен быть отличен от нуля.

Из этого определения равенства многочленов от нескольких неизвестных вытекает, что мы можем члены многочлена писать в любом порядке следования, так как два многочлена, отличающиеся лишь расположением членов, но не самими членами, равны.

Под *суммой* $f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n)$ двух произвольных многочленов $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ над P мы будем подразумевать такой многочлен, который получится, если приписать к $f(x_1, \ldots, x_n)$ со знаками «+» члены $g(x_1, \ldots, x_n)$ и затем произвести приведение подобных членов[1].

Произведение многочленов $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ вводится следующим образом. Сначала определяем произведение одночленных выражений $Ax_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$ и $Bx_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}$, а именно полагаем:

$$\left(Ax_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}\right)\left(Bx_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}\right) = \\ = ABx_1^{\varkappa_1+\nu_1}x_2^{\varkappa_2+\nu_2} \ldots x_n^{\varkappa_n+\nu_n}. \qquad (2)$$

А теперь условимся под *произведением* $f(x_1, \ldots, x_n) \times g(x_1, \ldots, x_n)$ понимать такой многочлен, который получается после умножения по правилу (2) каждого члена многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ на каждый член многочлена $g(x_1, \ldots, x_n)$ и приведения образовавшихся при этом подобных членов.

Обозначим множество всех многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ над P через $P[x_1, \ldots, x_n]$. Очевидно, что, складывая или перемножая два многочлена из $P[x_1, \ldots, x_n]$, мы получаем однозначно многочлен из того же множества $P[x_1, \ldots, x_n]$. Эти операции сложения и умножения многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$, в частности, совпадают с арифметическими действиями сложения и умножения чисел, когда многочлены являются числами из поля P. Но мы покажем и нечто большее, а именно докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Операции сложения и умножения многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$ подчиняются коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному законам, и в множестве $P[x_1, \ldots, x_n]$ выполнима обратная операция — вычитание многочленов.*

---

[1] Т. е. мы складываем коэффициенты A_k и B_l подобных членов $A_kx_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$ и $B_lx_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$ и вместо этих членов пишем только один член

$$(A_k + B_l)x_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}.$$

Доказательство. Возьмем из $P[x_1, \ldots, x_n]$ два каких-нибудь многочлена f и g. Добавляя в случае необходимости члены с коэффициентами, равными нулю, мы всегда можем добиться того, чтобы каждый член одного многочлена был подобен некоторому члену другого многочлена[1]. Таким образом, f и g можно записать в виде:

$$f = A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + A_s x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots x_n^{\omega_n},$$

$$g = B_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + B_s x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots x_n^{\omega_n}.$$

Отсюда получается, что

$$f + g = (A_1 + B_1) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + (A_s + B_s) x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots x_n^{\omega_n},$$

$$g + f = (B_1 + A_1) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + (B_s + A_s) x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots x_n^{\omega_n} =$$

$$= (A_1 + B_1) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + (A_s + B_s) x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots x_n^{\omega_n},$$

так как сложение чисел поля P подчиняется коммутативному закону. Мы видим, что

$$f + g = g + f,$$

т. е. сложение многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$ подчиняется коммутативному закону.

При умножении f на g мы должны каждый член $A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$ многочлена f умножить на каждый член $B_l x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}$ многочлена g по правилу (2):

$$\left(A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}\right)\left(B_l x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}\right) = A_k B_l x_1^{\varkappa_1+\nu_1} x_2^{\varkappa_2+\nu_2} \ldots x_n^{\varkappa_n+\nu_n}.$$

Но этот же результат получится, если каждый член g умножать на каждый член f:

$$\left(B_l x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}\right)\left(A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}\right) = B_l A_k x_1^{\nu_1+\varkappa_1} x_2^{\nu_2+\varkappa_2} \ldots x_n^{\nu_n+\varkappa_n} =$$

$$= A_k B_l x_1^{\varkappa_1+\nu_1} x_2^{\varkappa_2+\nu_2} \ldots x_n^{\varkappa_n+\nu_n}.$$

Следовательно, $fg = gf$, т. е. умножение многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$ также подчиняется коммутативному закону.

Возьмем теперь из $P[x_1, \ldots, x_n]$ произвольный третий многочлен h. Его также можно записать в виде:

$$h = C_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + C_s x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots x_n^{\omega_n}.$$

---

[1] При добавлении членов с нулевыми коэффициентами в сумме и в произведении многочленов появятся дополнительные члены с коэффициентами, также равными нулю. Согласно определению равенства многочленов сумма и произведение от этого измениться не может.

Предоставляем читателю составить суммы $(f+g)+h$ и $f+(g+h)$ и, пользуясь ассоциативностью сложения чисел, убедиться, что эти суммы равны, т. е. что сложение многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$ подчиняется ассоциативному закону.

Затем легко видеть, пользуясь правилом (2) и ассоциативностью умножения чисел, что

$$\left[\left(A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}\right)\left(B_l x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}\right)\right]\left(C_m x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}\right) =$$
$$= \left(A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}\right)\left[\left(B_l x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}\right)\left(C_m x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}\right)\right],$$

в силу чего $(fg)h = f(gh)$, т. е. и умножение многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$ подчиняется ассоциативному закону.

Пользуясь правилом (2) и дистрибутивным законом сложения и умножения чисел, получаем:

$$\left(A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}\right)\left[\left(B_l + C_l\right) x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}\right] =$$
$$= \left[A_k\left(B_l + C_l\right)\right] x_1^{\varkappa_1+\nu_1} x_2^{\varkappa_2+\nu_2} \ldots x_n^{\varkappa_n+\nu_n} =$$
$$\left(A_k B_l + A_k C_l\right) x_1^{\varkappa_1+\nu_1} x_2^{\varkappa_2+\nu_2} \ldots x_n^{\varkappa_n+\nu_n}.$$

Мы видим, что член

$$\left(A_k B_l + A_k C_l\right) x_1^{\varkappa_1+\nu_1} x_2^{\varkappa_2+\nu_2} \ldots x_n^{\varkappa_n+\nu_n}$$

получается в результате приведения подобных членов

$$A_k B_l x_1^{\varkappa_1+\nu_1} \ldots x_n^{\varkappa_n+\nu_n} \quad \text{и} \quad A_k C_l x_1^{\varkappa_1+\nu_1} \ldots x_n^{\varkappa_n+\nu_n},$$

которые образовались при перемножении f на g и f на h. Тем самым становится очевидным справедливость равенства

$$f(g+h) = fg + fh,$$

т. е. для многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$ верен дистрибутивный закон.

Наконец, покажем, что во множестве $P[x_1, \ldots, x_n]$ выполнима обратная операция — вычитание, а именно: в $P[x_1, \ldots, x_n]$ уравнение $f + z = g$ всегда разрешимо.

В самом деле, нетрудно проверить, что решением этого уравнения является многочлен

$$z = \left(B_1 - A_1\right) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + \left(B_s - A_s\right) x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots x_n^{\omega_n}.$$

Теорема доказана.

Теперь можно сделать следующие выводы.

1. Так как сложение многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$ подчиняется коммутативному и ассоциативному законам, то многочлен f над полем P можно рассматривать как сумму его членов, причем члены можно писать в любом порядке.

2. Так как умножение многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$ подчиняется ассоциативному закону, то символы $x_\nu^2, x_\nu^3 \ldots$ можно рассматривать как степени неизвестного x_ν, причем $x_\nu^\alpha x_\nu^\beta = x_\nu^{\alpha+\beta}$. Каждый член $A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$ многочлена f можно рассматривать как произведение степеней $x_1^{\varkappa_1}, x_2^{\varkappa_2}, \ldots, x_n^{\varkappa_n}$ неизвестных, взятое с числовым коэффициентом A_k из поля P, причем A_k можно писать не только слева, но и справа в силу коммутативности умножения.

3. Уравнение $f + z = g$, где f и g — произвольные многочлены из $P[x_1, \ldots x_n]$, имеет единственное решение.

В самом деле, обозначим через φ решение уравнения $f + z = 0$, где 0 означает многочлен, равный нулю, и пусть h — какое-нибудь решение уравнения $f + z = g$. Тогда мы можем написать, что $f + h = g$. Отсюда $(f + \varphi) + h = g + \varphi$, или $0 + h = g + \varphi$ или, наконец, $h = g + \varphi$. Мы однозначно выразили многочлен h через многочлены g и φ. Тем самым единственность решения уравнения $f + z = g$ становится очевидной.

Это единственное решение обозначается через $g - f$ и называется *разностью* многочленов g и f. В частности, $f - f = 0$, $0 - f = -f$, где $-f$ означает многочлен, противоположный f, т. е. такой многочлен, сумма которого с многочленом f равна нулю. Очевидно, что если

$$f = A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + A_s x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots x_n^{\omega_n},$$

то

$$-f = (-A_1) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + (-A_s) x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \ldots x_n^{\omega_n}.$$

В дальнейшем мы будем множество $P[x_1, \ldots, x_n]$ называть *кольцом многочленов от* $x_1, \ldots, x_n$ *над полем* P.

Введем, далее, понятие степени многочлена от нескольких неизвестных.

Пусть f — многочлен из $P[x_1, \ldots, x_n]$, отличный от нуля. По меньшей мере один из его коэффициентов должен быть не равен нулю. Мы будем предполагать, что все коэффициенты f не равны нулю; в противном случае мы опустили бы члены с нулевыми коэффициентами. *Степенью* многочлена f *по отношению к неизвестному* x_ν называется наибольший показатель, с которым x_ν входит в члены многочлена. Например, степень многочлена

$$5x_1x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 3x_1x_2 - 7x_2^3$$

над полем рациональных чисел относительно x_1 равна двум, а относительно x_2 равна трем.

Если в многочлен f неизвестное x_ν фактически не входит, то степень f относительно этого неизвестного x_ν будет, очевидно, равна нулю.

Назовем *степенью члена* $A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$ многочлена $f \neq 0$ сумму показателей $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$ неизвестных. Тогда *степенью многочлена* f (по отношению ко всей совокупности неизвестных) называется наибольшая из степеней его членов. Так, например, степень многочлена

$$x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2 x_3 + 8x_1^2 x_3^3 - 5x_1 + 7$$

равна пяти.

Нуль будет единственным многочленом от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, не имеющим никакой степени, а числа поля P, отличные от нуля, будут многочленами нулевой степени от тех же неизвестных. В этом отношении мы имеем для многочленов от нескольких неизвестных то же утверждение, что и для многочленов от одного неизвестного. Однако в отличие от многочленов от одного неизвестного у многочленов от нескольких неизвестных уже нельзя располагать члены по убывающим или возрастающим степеням, нельзя говорить о старшем члене, так как в многочлене $f \neq 0$ могут встречаться несколько членов наибольшей степени, а в некоторых случаях и все члены могут быть одной и той же степени.

Например, степень многочлена

$$x_1 x_2 x_3 + 2x_1^2 x_2 + 8x_1^2 + 7x_2 + 6$$

равна трем, и в этом многочлене имеются два члена со степенью, равной трем. В многочлене

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_1 x_2 + x_2 x_3$$

все члены имеют вторую степень.

Многочлен $f \neq 0$ из $P[x_1, \ldots, x_n]$ принято называть *однородным многочленом* или *формой m-й степени,* если все его члены имеют одну и ту же степень m. В частности, форма первой степени называется линейной, второй степени — квадратичной, третьей степени — кубичной.

Тем не менее существует вполне определенный способ расположения членов многочлена от нескольких неизвестных. Он заключается в следующем.

Возьмем снова из $P[x_1, \ldots, x_n]$ произвольный многочлен f, отличный от нуля. Условимся считать из двух членов многочлена тот *выше,* у которого больше показатель при x_1, а из двух членов с одинаковыми показателями при x_1 тот, у которого больше показатель при x_2, и т. д. Иными словами, член $A_k x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$ будет выше члена $A_l x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}$ тогда и только тогда, когда первая неисчезающая разность $\varkappa_i - \nu_i$ положительна.

Так, из двух членов $x_1^6x_2^3$ и $x_1^6x_2^3x_3x_4$ второй выше первого.

Напишем впереди *высший* член многочлена f, затем следующий по высоте член и т. д. Мы получим тогда так называемое *лексикографическое* расположение членов.

П р и м е р. Расположить лексикографически члены многочлена

$$f = x_1x_2 + x_1^2x_4 + x_2^2x_3x_4 + x_2^3x_4.$$

Здесь высшим членом является $x_1^2x_4$, затем пойдут x_1x_2, $x_2^3x_4$ и $x_2^2x_3x_4$. Таким образом,

$$f = x_1^2x_4 + x_1x_2 + x_2^3x_4 + x_2^2x_3x_4.$$

Обращаем внимание на то, что лексикографическое расположение членов многочлена зависит от нумерации неизвестных — при другой нумерации неизвестных может получиться и другое лексикографическое расположение.

Большую помощь нам окажет следующая лемма.

Лемма. *Высший член произведения fg двух многочленов $f \neq 0$ и $g \neq 0$ из $P[x_1, \ldots, x_n]$ равен произведению высших членов этих многочленов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $n = 1$, т. е. для многочленов от одного неизвестного, лемма очевидна. В этом случае высший член совпадает со старшим членом, а старший член произведения многочленов равен произведению старших членов этих многочленов.

Таким образом, мы можем воспользоваться методом математической индукции; предположим, что лемма верна для многочленов от $n - 1$ неизвестных, и покажем, что тогда она верна и для многочленов от n неизвестных.

Пусть

$$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \tag{3}$$

— высший член многочлена f из $P[x_1, \ldots, x_n]$ и

$$Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n} \tag{4}$$

— высший член многочлена g из $P[x_1, \ldots, x_n]$. Сгруппируем члены f и g по убывающим степеням x_1; тогда мы можем написать, что

$$f = a_0(x_2, \ldots, x_n)x_1^{\alpha_1} + a_1(x_2, \ldots, x_n)x_1^{\alpha_1-1} + \ldots + a_{\alpha_1}(x_2, \ldots, x_n),$$

$$g = b_0(x_2, \ldots, x_n)x_1^{\beta_1} + b_1(x_2, \ldots, x_n)x_1^{\beta_1-1} + \ldots + b_{\beta_1}(x_2, \ldots, x_n),$$

где

$$a_0(x_2, \ldots, x_n) \neq 0,\ a_1(x_2, \ldots, x_n), \ldots, a_{\alpha_1}(x_2, \ldots, x_n)$$

и

$$b_0(x_2, \ldots, x_n) \neq 0,\ b_1(x_2, \ldots, x_n), \ldots, b_{\beta_1}(x_2, \ldots, x_n)$$

многочлены от $n-1$ неизвестных $x_2, \ldots, x_n$ над полем P. Легко видеть, что $Ax_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n}$ — высший член $a_0(x_2, \ldots, x_n)$, а $Bx_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3} \ldots x_n^{\beta_n}$ — высший член $b_0(x_2, \ldots, x_n)$. В самом деле, если бы, например, $Cx_2^{\gamma_2}x_3^{\gamma_3} \ldots x_n^{\gamma_n}$ был высшим членом $a_0(x_2, \ldots, x_n)$, то $Cx_1^{\alpha_1}x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n}$ было бы членом f более высоким, чем член (3), что невозможно.

Перемножая многочлены f и g, получаем:

$$fg = a_0(x_2, \ldots, x_n)\, b_0(x_2, \ldots, x_n)\, x_1^{\alpha_1+\beta_1} +$$
$$+ [a_0(x_2, \ldots, x_n)\, b_1(x_2, \ldots, x_n) + a_1(x_2, \ldots, x_n) \times$$
$$\times b_0(x_2, \ldots, x_n)]\, x_1^{\alpha_1+\beta_1-1} + \ldots + a_{\alpha_1}(x_2, \ldots, x_n)\, b_{\beta_1}(x_2, \ldots, x_n).$$

Мы допустили, что лемма верна для многочленов от $n-1$ неизвестных. Следовательно, высший член $a_0(x_2, \ldots, x_n)\, b_0(x_2, \ldots, x_n)$ равен произведению высших членов многочленов $a_0(x_2, \ldots, x_n)$ и $b_0(x_2, \ldots, x_n)$, т. е. он равен

$$(Ax_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n})(Bx_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3} \ldots x_n^{\beta_n}).$$

Отсюда получается, что высший член fg должен равняться

$$(Ax_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n})(Bx_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3} \ldots x_n^{\beta_n})\, x_1^{\alpha_1+\beta_1} =$$
$$= (Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n})(Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}),$$

т. е. должен равняться произведению высших членов (3) и (4) многочленов f и g.

Итак, предполагая лемму справедливой для $n-1$ неизвестных, мы убедились, что лемма верна и для n неизвестных. Так как лемма верна для одного неизвестного, то тем самым лемма полностью доказана.

Только что доказанную лемму можно, очевидно, распространить и на любое число сомножителей.

Теперь нетрудно убедиться, что *произведение двух многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$, отличных от нуля, также отлично от нуля.*

Действительно, пусть f и g — два произвольных многочлена из $P[x_1, \ldots, x_n]$, отличные от нуля, и $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ — высший член f, а $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ — высший член g. Тогда по доказанной лемме высшим членом произведения fg будет $ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2} \ldots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$, причем его коэффициент AB будет отличен от нуля, так как $A \neq 0$, $B \neq 0$. Следовательно, $fg \neq 0$, что и требовалось показать.

Относительно степени произведения двух многочленов от нескольких неизвестных имеет место точно такая же теорема, что и для многочленов от одного неизвестного, а именно:

Степень произведения двух многочленов f и g из $P[x_1, \ldots, x_n]$ равна сумме степеней этих многочленов.

Доказательство. Пусть m — степень многочлена f и l — степень многочлена g. Группируя в f члены степени m и в g — члены степени l, получаем:

$$f = \varphi + f_1, \quad g = \psi + g_1,$$

где φ и ψ — формы соответственно степени m и l, а f_1, g_1 — многочлены из $P[x_1, \ldots, x_n]$. При этом f_1 может равняться нулю; но если $f_1 \neq 0$, то степень f_1 меньше m. Аналогично степень g_1 меньше l, когда $g_1 \neq 0$. Перемножая f и g, находим, что

$$fg = \varphi\psi + \varphi g_1 + f_1\psi + f_1 g_1.$$

Очевидно, что степени членов произведений φg_1, $f_1\psi$ и $f_1 g_1$ не могут превосходить $m + l - 1$. Что касается членов произведения $\varphi\psi$, то их степень равна $m + l$, если только $\varphi\psi$ отлично от нуля. Но $\varphi \neq 0$ и $\psi \neq 0$. Следовательно, по свойству произведения многочленов, отличных от нуля, $\varphi\psi \neq 0$. Таким образом, мы видим, что степень fg равна $m + l$, что и требовалось показать. Эту теорему можно распространить и на произведение нескольких многочленов: *степень произведения нескольких многочленов из $P[x_1, \ldots, x_n]$ равна сумме степеней многочленов — сомножителей.*

Понятие значения многочлена от нескольких неизвестных вводится совершенно так же, как и в случае многочлена от одного неизвестного. Именно, пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный многочлен из $P[x_1, \ldots, x_n]$. Заменим в нем неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ какими-нибудь числами $c_1, \ldots, c_n$ поля P. Мы получим тогда некоторое число d того же поля P. Это число d и называется *значением многочлена* $f(x_1, \ldots, x_n)$ при значениях неизвестных $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ и обозначается через $f(c_1, \ldots, c_n)$.

Очевидно, что если два многочлена из $P[x_1, \ldots, x_n]$ равны, то их значения также равны при любых значениях неизвестных.

При помощи примерно тех же соображений, что и для случая многочлена от одного неизвестного, можно показать, что если

$$f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1, \ldots, x_n) = k(x_1, \ldots, x_n),$$

то

$$f(c_1, \ldots, c_n) + g(c_1, \ldots, c_n) = h(c_1, \ldots, c_n),$$
$$f(c_1, \ldots, c_n)\, g(c_1, \ldots, c_n) = k(c_1, \ldots, c_n)$$

при произвольных значениях $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ неизвестных

---

[1] Можно, впрочем, говорить и о значениях многочлена f при значениях неизвестных, взятых из расширения P' поля P, так как f можно рассматривать и как многочлен над P'.